Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2022»
25–27 травня 2022 р., Львів

УДК 512.53+512.64

Σ-ФУНКЦІЯ ДЛЯ НАДНАПІВГРУП НАПІВГРУП ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

Віталій Бондаренко, Олеся Зубарук

Інститут математики НАН України, vitalij.bond@gmail.com
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
sambrinka@ukr.net

Доповідь пов'язана зі започаткованою авторами тематикою дослідження напівгруп через вивчення властивостей матричних зображень їхніх наднапівгруп (а не лише їх самих та їхніх піднапівгруп, як у традиційних дослідженнях).

Для двох напівгруп, перша, згідно означення, є наднапівгрупою другої, якщо друга ізоморфна деякій фактор-напівгрупі першої. Якщо зафіксована система твірних та визначальних співвідношень напівгрупи, то її довільну наднапівгрупу, яка отримується шляхом відкидання деяких (зафіксованих) співвідношень, будемо називати *стандартною* (зауважимо, що природні співвідношення для одиничного і нульового елементів, якщо вони є, не вважаються нами визначальними).

Продемонструємо нашу тематику на напівгрупах третього порядку, таблиці Келі яких описав Т. Тамура (1953 р.), а їхні козображення і нерозкладні зображення — перший автор разом зі своїм учнем Я. В. Заціхою (2018 р.). Серед них (із 24-ох, з точністю до ізоморфізму), існує лише три, які породжуються двома взаємно анульовними елементами:
$\mathcal{Q}^{00}_{(22)} := \langle b, c\rangle : b^2 = 0,\, c^2 = 0,\, bc = 0, cb = 0$; $\mathcal{Q}^{00}_{[22]} := \langle b, c\rangle : b^2 = b$, $c^2 = c,\, bc = 0, cb = 0$; $\mathcal{Q}^{00}_{(22]} := \langle b, c\rangle : b^2 = 0,\, c^2 = c,\, bc = 0, cb = 0$.

Дві останні напівгрупи мають скінченний зображувальний тип, тобто число класів еквівалентності нерозкладних зображень скінченне, а перша – ручний (до якого ми скінченний тип не включаємо). Ці три напівгрупи цікаві тим, що їхні природні наднапівгрупи $\mathcal{Q}_{(22)} := \mathcal{Q}^{00}_{(22)} \setminus \{bc = 0, cb = 0\}$, $\mathcal{Q}_{[22]} := \mathcal{Q}^{00}_{[22]} \setminus \{bc = 0, cb = 0\}$ і $\mathcal{Q}_{(22]} := \mathcal{Q}^{00}_{(22]} \setminus \{bc = 0, cb = 0\}$ (тобто без співвідношень $bc = 0, cb = 0$) є ручними; щодо опису їхніх зображень див. монографію першого автора [1].

Теорема 1. *Нехай* $S \in \{\mathcal{Q}^{00}_{(22)}, \mathcal{Q}^{00}_{[22]}, \mathcal{Q}^{00}_{(22]}\}$ *і* $T \in \{\mathcal{Q}_{(22)}, \mathcal{Q}_{[22]}, \mathcal{Q}_{(22]}\}$, *причому їхні нижні індекси однакові. Тоді* (1) *в кожному з трьох випадків напівгрупа* T *є максимальною ручною стандартною наднапівгрупою напівгрупи* S *(для* S *скінченного типу единою);* (2) *в двох останніх випадках для* S *існує єдина, з точністю до дуальності, стандартна наднапівгрупа скінченного типу і* T *є її стандартною наднапівгрупою, а саме відповідно* $\mathcal{Q}^{0}_{[22]} := \mathcal{Q}^{00}_{[22]} \setminus \{cb = 0\}$ *і* $\mathcal{Q}^{0}_{(22]} := \mathcal{Q}^{00}_{(22]} \setminus \{cb = 0\}$.

Матричні зображення напівгруп $\mathcal{Q}^0_{[22]}$ і $\mathcal{Q}^0_{(22]}$ детально нами досліджувалися. Описано їхні нерозкладні зображення, а також відповідна категорія зображень (в термінах алгебри Ауслендера).

Сформулюємо останній результат, пов'язаний з обчисленням Σ-функції напівгруп, яка є дискретною характеристикою категорії зображень, що залежить від розподілу розмірностей алгебр ендоморфізмів її "однорідних" об'єктів спеціального вигляду.

Спочатку дамо необхідні означення.

Матричні зображення $T : s \to T(s)$ (s пробігає S) напівгрупи S над полем K утворюють категорію, якщо за множину морфізмів із T в T' вважати множину (векторний простір) всіх матриць X таких, що $T(s)X = XT'(s)$ для всіх $s \in S$. Через $p(T)$ позначаємо розмірність алгебри ендоморфізмів матричного зображення T. Очевидно, що $p(T)$ не змінюється при заміні T на еквівалентне йому зображення. Якщо S — напівгрупа скінченного зображувального типу над K, а $T = \{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$ — повна система її нерозкладних попарно нееквівалентних матричних зображень, то для $n \in [1, m] := \{1, 2, \ldots, m\}$ покладемо

$$p_n(T) := \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_n} p(T_{i_1} \oplus T_{i_2} \oplus \ldots \oplus T_{i_n}), \qquad \Sigma_S(n) := p_n(T).$$

Введена функція $\Sigma_S : [1, m] \to \mathbb{N}$ називається *Σ-функцією напівгрупи* S [2].

Теорема 2. *Наднапівгрупа* $S := \mathcal{Q}^0_{(22]} = \mathcal{Q}^{00}_{(22]} \setminus \{cb = 0\}$ *напівгрупи* $\mathcal{S}^{00}_{(22]}$ *має 5 класів еквівалентності нерозкладних зображень і*

$$\Sigma_S(n) = \begin{cases} 7, & \text{якщо} \quad n = 1, \\ 41, & \text{якщо} \quad n = 2, \\ 81, & \text{якщо} \quad n = 3, \\ 53, & \text{якщо} \quad n = 4, \\ 20, & \text{якщо} \quad n = 5. \end{cases}$$

1. *Bondarenko V. M.* Linear operators on vector spaces graded by posets with involution: tame and wild cases. – Kyiv: Institute of Mathematics, 2006. – 168 pp.

2. *Бондаренко В. М., Зубарук О. В.* Σ-функція числа параметрів для системи матричних зображень // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – том 12, № 3. – С. 56–64.

Σ-FUNCTION FOR OVERSEMIGROUPS OF SEMIGROUPS OF THE THIRD ORDER

We explain by the example of third-order semigroups initiated by the authors the research topic of semigroups through the study of the properties of matrix representations of their oversemigroups.