

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ З УЗАГАЛЬНЕНОЮ МІШАНОЮ ПОХІДНОЮ У ПРОСТОРІ L_2

Юлія Балабуха, Світлана Гембарська, Ігор Романюк

Волинський національний університет імені Лесі Українки,
juliiet.st0@gmail.com, gembarskaya72@gmail.com, iromaniuk@ukr.net

Нехай R^d d – вимірний простір точок $x = (x_1, \dots, x_d)$, $T^d = \prod_{j=1}^d [0, 2\pi]$,
 $L_2(T^d)$ – множина 2π – періодичних по кожній змінній функцій f зі
стандартною нормою $\|f\|_2$.

$$L_2^0(T^d) = \left\{ f \in L_2(T^d) : \int_0^{2\pi} f(x) dx_j = 0, j = \overline{1, d} \right\}.$$

Далі, нехай $\psi_j(\cdot) > 0$ – довільні функції натурального аргументу,
 $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, d}$. Припустимо, що кратний ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \prod_{j=1}^d \frac{e^{\frac{i\pi\beta_j}{2} \operatorname{sgn} k_j}}{\psi_j(|k_j|)} c_k(f) e^{i(k, x)}, (k, x) = k_1 x_1 + \dots + k_d x_d, c_k \in \mathbb{C},$$

є рядом Фур'є деякої функції з $L_2^0(T^d)$. Тоді цю функцію, наслідуючи
О.І. Степанця [1], позначимо f_β^ψ і назвемо (ψ, β) – похідною функції f . Через
 $L_{\beta, 2}^\psi(T^d)$ позначатимемо клас функцій для яких $\|f_\beta^\psi\|_2 \leq 1$. Зауважимо, що у
випадку $\psi_j(|k_j|) = |k_j|^{-r_j}$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, класи $L_{\beta, 2}^\psi(T^d)$ співпадають з класами
Вейля-Надя $W_{\beta, 2}^r(T^d)$ (див. [1], с.25).

Для векторів $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$,
покладемо $\rho(s) = \left\{ k \in \mathbb{Z}^d : 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = \overline{1, d} \right\}$. Через $Q_n, n \in \mathbb{N}$

**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2022»,
25–27 травня 2022 р., Львів**

позначимо множину $Q_n = \bigcup_{(s,1) < n} \rho(s)$, яку називають східчастим гіперболічним хрестом. Відповідно

$$T(Q_n) = \left\{ t : t(x) = \sum_{k \in Q_n} c_k e^{i(k,x)}, c_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Нами досліджувалася апроксимаційна характеристика

$$E_n \left(L_{\beta,2}^{\psi} (T^d) \right)_2 = \sup_{f \in L_{\beta,2}^{\psi} (T^d)} \inf_{t \in T(Q_n)} \|f - t\|_2,$$

яку називають найкращим наближенням класу $L_{\beta,2}^{\psi} (T^d)$ поліномами з множини $T(Q_n)$.

Теорема. Нехай $\psi_j(\cdot) > 0$, $j = \overline{1, d}$, – незростаючі функції натурального аргументу. Тоді для будь-яких $\beta \in \mathbb{R}^d$ справедлива рівність

$$E_n \left(L_{\beta,2}^{\psi} (T^d) \right)_2 = \max_{s: (s,1) = n} \prod_{j=1}^d \psi_j \left(2^{s_j} \right). \quad (1)$$

Наслідок. Нехай $\psi_j(k_j) = |k_j|^{-r}$, $r > 0$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, d}$. Тоді

$$E_n \left(W_{\beta,2}^r (T^d) \right)_2 = 2^{-nr}. \quad (2)$$

Рівність (2) встановлена у роботі [2].

1. А. И. Степанец. Методы теории приближений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Т.1. – 426 с.
2. К. И. Бабенко. О приближении периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами // Докл. АН СССР. – 1960. – 132, №2. – с.247–250.

**APPROXIMATION OF CLASSES OF PERIODIC
FUNCTIONS OF MANY VARIABLES WITH GENERALIZED
MIXED DERIVATIVE IN THE SPACE L_2**

The exact value is obtained for the best approximation of the classes of periodic multivariate functions by trigonometric polynomials with the numbers of harmonics from the step hyperbolic crosses in the space L_2 .