

УДК 517.927

ЛІНІЙНІ ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ СИСТЕМИ З НАЙБІЛЬШ ЗАГАЛЬНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ В ПРОСТОРАХ СОБОЛЄВА

Олена Атласюк

Інститут математики НАН України, hatlasiuk@gmail.com

Нехай задано скінченний інтервал $(a, b) \subset \mathbb{R}$ і параметри $\{m, n, r, l\} \subset \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$.

Позначимо через $W_p^n = W_p^n([a, b]; \mathbb{C}) := \{y \in C^{n-1}[a, b]: y^{(n-1)} \in AC[a, b], y^{(n)} \in L_p[a, b]\}$ комплексний простір Соболева.

Розглянемо на інтервалі (a, b) послідовність крайових задач

$$L(k)y(t, k) := y^{(r)}(t, k) + \sum_{j=1}^r A_{r-j}(t, k)y^{(r-j)}(t, k) = f(t, k), \quad (1)$$

$$B(k)y(\cdot, k) = c(k), \quad t \in (a, b), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

де $k \rightarrow \infty$, матриці-функції $A_{r-j}(\cdot, k) \in (W_p^n)^{m \times m}$, вектор-функція $f(\cdot, k) \in (W_p^n)^m$, вектор $c(k) \in \mathbb{C}^l$, $B(k): (W_p^{n+r})^m \rightarrow \mathbb{C}^l$ є лінійним неперервним оператором, а шуканою є вектор-функція $y(\cdot, k) \in (W_p^{n+r})^m$.

Крайова умова (2) є найбільш загальною для цього рівняння. Вона може містити похідні цілого або дробового порядку s , де $0 < s \leq n + r$. Крайові задачі можуть бути з перевизначеними або недовизначеними крайовими умовами у випадку несепарабельних нереклексивних просторів Соболева.

Позначимо лінійний неперервний оператор

$$(L(k), B(k)): (W_p^{n+r})^m \rightarrow (W_p^n)^m \times \mathbb{C}^l \quad (3)$$

та послідовність характеристичних матриць задачі (1), (2)

$$M(L(k), B(k)) := ([B(k)Y_0(\cdot, (k))], \dots, [B(k)Y_{r-1}(\cdot, (k))]) \subset \mathbb{C}^{mr \times l},$$

де кожна прямокутна матриця $M(L, B)$ утворена з r прямокутних блоків $[BY_j(\cdot)]$ розмірності $m \times l$, а j -ий стовпчик матриці $[BY_s(\cdot)]$ є результатом з дії оператора B на j -ий стовпчик матриці-функції $Y_s(\cdot)$.

Теорема 1. *Вимірності ядра і коядра оператора (L, B) дорівнюють відповідно вимірностям ядра і коядра характеристичної матриці $M(L, B)$.*

Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2022» 25–27 травня 2022 р., Львів

Сформулюємо достатні умови збіжності послідовності характеристичних матриць $M(L(k), B(k))$ до матриці $M(L, B)$ при $k \rightarrow \infty$.

Теорема 2. *Якщо послідовності операторів $(L(k), B(k))$ сильно збігається до оператора (L, B) , то послідовність характеристичних матриць $M(L(k), B(k))$ збігається до матриці $M(L, B)$ при $k \rightarrow \infty$.*

У випадку $1 \leq p < \infty$ сформульовано конструктивні критерії, які гарантують сильну та рівномірну збіжності послідовності операторів $(L(k), B(k))$ до оператора (L, B) .

Використовуючи теорему 2, отримано достатні умови напівнеперервності зверху вимірностей ядра та коядра оператора (L, B) , наслідки про стійкість оборотності послідовності операторів (3), існування та єдиність розв'язку крайової задачі (1), (2).

Робота підтримана проектом для молодих вчених НАН України 01-01/03-2021 "Аналіз крайових задач у моделях природничих наук", (ПК 0121U111949)

1. Атласюк О. М., Михайлець В. А. Про розв'язність неоднорідних крайових задач у просторах Соболева // Доп. НАН України. – 2019. – № 11. – С. 3 – 7.

LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH GENERIC BOUNDARY CONDITIONS IN SOBOLEV SPACES

We study linear systems of ordinary differential equations on a finite interval with the most general (generic) inhomogeneous boundary conditions in Sobolev spaces. These boundary problems include all known types of classical and numerous nonclassical conditions. The latter may contain derivatives of integer and fractional order, which may exceed the order of the differential equation.

Sufficient conditions for the convergence of the sequence of characteristic matrices are found. Constructive criteria are formulated, which guarantee strong and uniform convergence of the sequence of operators. Sufficient semicontinuity conditions on top of dimensions of the kernel and cokernel of the operator (L, B) are obtained; consequences on the stability of the invertibility of the sequence of operators (3), the existence and uniqueness of the solution to the boundary-value problem (1), (2) are also obtained.