

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПРУЖНОГО СЕРЕДОВИЩА З ТОНКИМ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Роман Андрійчук

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України, вул. Наукова, 3-б, Львів*

Нехай у пружному ізотропному середовищі за умов осесиметричного кручення та динамічних навантажень знаходиться тонке дискове п'єзокерамічне включення, яке займає область $W_\varepsilon = \{(r, z) : 0 \leq r \leq a, 2|z| \leq h\}$, де $r\theta z$ – циліндрична система координат; a і h – радіус і постійна товщина включення. Мала відносна товщина включення характеризується малим безрозмірним параметром $\varepsilon = h/a \ll 1$.

Розглянуто випадок ідеального механічного контакту між складовими композиту

$$u_\theta(r, \pm h) = u_\theta^0(r, \pm h), \quad \sigma_{\theta z}(r, \pm h) = \sigma_{\theta z}^0(r, \pm h) \quad (1)$$

та різні граничні електричні умови на поверхні включення, що відповідають електроізолюваному включенню

$$D_z^0(r, \pm h) = 0 \quad (2)$$

або пружній електропровідній матриці із заземленою лінією контакту

$$\varphi^0(r, \pm h) = 0. \quad (3)$$

Тут $u_\theta(r, z)$ та $\sigma_{\theta z}(r, z)$ – повні поля зміщень та напружень у матриці, $u_\theta^0(r, z)$ – відмінна від нуля компонента зміщень, $\sigma_{\theta z}^0(r, z)$ – компонента тензора напружень у включенні, $D_z^0(r, z)$ – компонента вектора індукції електричного поля \mathbf{D}^0 , $\varphi^0(r, z)$ – електричний потенціал.

Оскільки відносна товщина включення мала, для отримання наближених розв'язків задачі використовуємо методи теорії сингулярних збурень. Подамо шукані величини у вигляді асимптотичних розкладів за степенями ε :

**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2022»,
25–27 травня 2022 р., Львів**

$$u_{\theta}^s(r, z) = \sum_{j=0}^{\infty} u_{\theta j}^s(r, z) \varepsilon^j, \quad u_{\theta}^0(r, z) = \sum_{j=0}^{\infty} u_{\theta j}^0(r, \bar{z}) \varepsilon^j, \quad (r, z) \in R^2 \setminus W_{\varepsilon}, \quad (4)$$

$$\varphi_P^0(r, z) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{Pj}^0(r, \bar{z}) \varepsilon^j, \quad \bar{z} = z/\varepsilon, \quad (r, z) \in W_{\varepsilon}. \quad (5)$$

Тут $u_{\theta}^s(r, z)$, – розсіяне неоднорідністю поле зміщень у матриці, $\varphi_P^0(r, z) = \varepsilon_{11} \varphi^0(r, z) / e_{15}$, де e_{15} і ε_{11} – п'єзоелектрична стала та діелектрична проникність матеріалу включення.

Характер асимптотик (4) – (5) визначає співвідношення між параметром контрастності жорсткостей складників електропружної системи $\gamma = c_{44}/\mu$ та ε . Тому розглянемо три різні діапазони зміни величини γ : **1)** $\varepsilon \leq \gamma \leq 1/\varepsilon$; **2)** $0 \leq \gamma \leq \varepsilon$; **3)** $1/\varepsilon \leq \gamma < \infty$.

Діапазон 1 відповідає випадку, коли механічні властивості матеріалів матриці та включення несуттєво відрізняються порівняно з параметром ε , тобто *діапазон 1* відповідає неконтрастним неоднорідностям. *Діапазон 2* описує випадок, коли жорсткість включення набагато менша, ніж жорсткість навколишнього середовища, порівняно з ε . *Діапазон 3* описує випадок включення великої жорсткості.

Отримані математичні моделі електропружного контакту тонкого включення з пружним середовищем можуть бути використані при дослідженні хвильових полів у пружних композитах із множинними тонкими п'єзокерамічними неоднорідностями.

MATHEMATICAL MODELING OF THE DYNAMIC INTERACTION OF ELASTIC MEDIUM WITH THIN PIEZOCERAMIC INCLUSION

A mathematical models of dynamic interaction between a thin plane piezoceramic inclusion and elastic isotropic medium for axisymmetric torsion of a composite are constructed. Perfect mechanical contact between components of a composite and zero electric potential or zero electric induction are prescribe at the boundary of inclusion. Cases of electrically insulated and grounded piezoceramic inclusions are considered. Modelling is performed using the apparatus of the theory of singular perturbations.