UDC 519.213

# ON THE CORRELATION FUNCTIONS OF THE CHARACTERISTIC POLYNOMIALS OF RANDOM MATRICES WITH INDEPENDENT ENTRIES: INTERPOLATION BETWEEN COMPLEX AND REAL CASES

**Ievgenii Afanasiev**

B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, Ukraine,
afanasiev@ilt.kharkov.ua

The talk is concerned with random matrices $M_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(x_{jk})$, where $x_{jk}$ are i.i.d. complex random variables such that

$$\mathbf{E}\{x_{jk}\} = 0, \quad \mathbf{E}\{|x_{jk}|^2\} = 1, \quad \mathbf{E}\{x_{jk}^2\} =: \kappa. \tag{1}$$

Here and everywhere below $\mathbf{E}$ denotes an expectation. In the particular case if the entries $x_{jk}$ are complex or real Gaussian this ensemble is known as Complex or Real Ginibre Ensemble respectively. The parameter $\kappa$ plays a role of a "reality measure". Indeed, on the one hand $\kappa = 0$ in the complex case. On the other hand $\kappa = 1$ in the real case.

We consider the correlation functions of the characteristic polynomials (correlation functions for short) of these matrices

$$\mathsf{f}_m(z_1, \ldots, z_m) = \mathbf{E}\left\{ \prod_{j=1}^{m} \det\left(M_n - z_j\right)\left(M_n - z_j\right)^* \right\}.$$

Despite these functions are not local, the knowledge of their asymptotic behavior can shed light on the asymptotic behavior of eigenvalues in the local regime. Moreover, the correlation functions are of independent interest.

The main result is the asymptotic behavior of the correlation functions given by the next theorem

**Теорема 1.** *Let an ensemble of real random matrices $M_n$ be defined by* (1). *Let the first $2m$ moments of the common distribution of entries of $M_n$ be finite and $z_j = z_0 + \dfrac{\zeta_j}{\sqrt{n}}$, $\zeta_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, m$. Let also $z_0$ and $\kappa$ satisfy at least one of two following conditions*

1. $|\kappa| < 1$ *and* $|z_0| < 1$*;*

*2.* $|\kappa| = 1$ *and* $|z_0| < 1$, $z_0 \notin \mathbb{R}$.

*Then the* $m^{th}$ *correlation function of the characteristic polynomials satisfies the asymptotic relation*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{m^2-m}{2}} \frac{\mathsf{f}_m(z_1,\ldots,z_m)}{\mathsf{f}_1(z_1)\cdots\mathsf{f}_1(z_m)} = C_{m,z_0} e^{d(\kappa,\kappa_4)} \frac{\det(K_{\mathbb{C}}(\zeta_j,\zeta_k))_{j,k=1}^m}{|\triangle(\zeta_1,\ldots,\zeta_m)|^2},$$

*where* $C_{m,z_0}$ *is some constant, which does not depend on the common distribution of entries and on* $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$; $\kappa_4 = \mathbf{E}\{|x_{11}|^4\} - |\mathbf{E}\{x_{11}^2\}|^2 - 2$,

$$\begin{aligned} d(\kappa,\kappa_4) &= -m\log\Big\{|1-|\kappa|z_0^2|^2 - |\kappa|^2\big(1-|z_0|^2\big)^2\Big\} \\ &\qquad + \frac{m^2-m}{2}\big(1-|z_0|^2\big)^2\kappa_4, \\ K_{\mathbb{C}}(z,w) &= e^{-|z|^2/2-|w|^2/2+z\overline{w}} \end{aligned}$$

*and* $\triangle(\zeta_1,\ldots,\zeta_m)$ *is a Vandermonde determinant of* $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$.

## ПРО КОРЕЛЯЦІЙНІ ФУНКЦІЇ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ ПОЛІНОМІВ ВИПАДКОВИХ МАТРИЦЬ З НЕЗАЛЕЖНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ: ІНТЕРПОЛЯЦІЯ МІЖ КОМПЛЕКСНИМ І ДІЙСНИМ ВИПАДКАМИ

*У доповіді буде розглянуто кореляційні функції характеристичних поліномів випадкових матриць з незалежними комплексними елементами. Ми дослідили те, як асимптотична поведінка кореляційних функцій залежить від другого моменту спільного закону розподілу ймовірностей для матричних елементів, при цьому другий момент можна трактувати як свого роду «міру дійсності» елементів. Ми покажемо, що кореляційні функції ведуть себе таким же чином, як і у випадку комплексного ансамблю Жинібра, з точністю до множника, що залежить лише від другого момента та абсолютного четвертого момента спільного розподілу ймовірностей матричних елементів.*