Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2021», 26–28 травня 2021 р., Львів

УДК 517.54; 517.12

ЛОКАЛЬНА ПОВЕДІНКА РЕГУЛЯРНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ БЕЛЬТРАМІ

Руслан Салімов, Марія Стефанчук

Інститут математики НАНУ, ruslan.salimov1@ gmail.com, stefanmv43@gmail.com

Нехай G – область у комплексній площині $\mathbb{C}$, тобто зв'язна та відкрита підмножина $\mathbb{C}$, і нехай $\mu : G \to \mathbb{C}$ – вимірна функція з $|\mu(z)|<1$ м.с. (майже скрізь) в G. *Рівнянням Бельтрамі* називається рівняння вигляду

$$f_{\bar{z}} = \mu(z) f_z, \tag{1}$$

де $f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y)$, $f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y)$, $z = x + iy$. Функція μ називається *комплексним коефіцієнтом*.

Нехай $\sigma : D \to \mathbb{C}$ – вимірна функція і $m \geqslant 0$. Розглянемо у полярній системі координат (r, θ) наступне рівняння:

$$f_r = \sigma(re^{i\theta}) \, | f_\theta |^m f_\theta, \tag{2}$$

де f_r і f_θ – частинні похідні відображення f по r і θ, відповідно.
Рівняння (2) можна записати у комплексній формі:

$$f_{\bar{z}} = \frac{z}{\bar{z}} \frac{\sigma(z)\,|z|\,i\,| z f_z - \bar{z} f_{\bar{z}} |^m - 1}{\sigma(z)\,|z|\,i\,| z f_z - \bar{z} f_{\bar{z}} |^m + 1} f_z. \tag{3}$$

Будемо вважати, що $m > 0$.

Відображення $f : G \to \mathbb{C}$ називається *регулярним у точці* $z_0 \in G$, якщо в цій точці f має повний диференціал і його якобіан $J_f = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 \neq 0$. Гомеоморфізм f класу Соболєва $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ називається *регулярним*, якщо $J_f > 0$ м.с.

Всюди далі будемо вважати, що $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Регулярним гомеоморфним розв'язком рівняння (3) будемо називати регулярний гомеоморфізм $f : G \to \mathbb{C}$, який м.с. у G задовольняє рівняння (3).

Теорема 1. *Нехай* $f:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ *– регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (3) класу Соболєва* $W_{\mathrm{loc}}^{1,2}$ *з нормуванням* $f(0)=0$. *Якщо для деяких чисел* $\lambda>1$, $\tau>0$ *і* $C_0>0$ *виконується умова*

$$\varepsilon^{\tau}\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon}\frac{dr}{\left(\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{\gamma_r}\left(\operatorname{Im}\overline{\sigma}(z)\right)^{-\frac{1}{m+1}}ds\right)^{m+1}}\geqslant C_0$$

для довільного $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0\in\left(0,\frac{1}{\lambda}\right)$, *то*

$$\liminf_{z\to 0}\frac{|f(z)|}{|z|^{\frac{\tau}{m}}}\leqslant C_0^{-\frac{1}{m}}m^{-\frac{1}{m}}.$$

Теорема 2. *Нехай* $f:\mathbb{B}\to\mathbb{B}$ *– регулярний гомеоморфний розв'язок рівняння (3) класу Соболєва* $W_{\mathrm{loc}}^{1,2}$ *з нормуванням* $f(0)=0$. *Якщо для деяких чисел* $A>1$ *і* $c_0>0$ *виконується умова*

$$\left(\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{\gamma_r}\left(\operatorname{Im}\overline{\sigma}(z)\right)^{-\frac{1}{m+1}}ds\right)^{m+1}\leqslant c_0 r^{A}$$

для м.в. $r\in(0,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, *то*

$$\liminf_{z\to 0}\frac{|f(z)|}{|z|^{\frac{A-1}{m}}}\leqslant \nu_0,$$

де ν_0 *– додатна стала, яка залежить тільки від* m, c_0 *і* A.

1. *R. R. Salimov, M. V. Stefanchuk*. On the local properties of solutions of the nonlinear Beltrami equation // J. Math. Sci. – 2020. – Vol. **248**. – P. 203 – 216.

LOCAL BEHAVIOR OF REGULAR SOLUTIONS OF THE NONLINEAR BELTRAMI EQUATION

The theorems on the asymptotic behavior of regular homeomorphic solutions of the nonlinear Beltrami equation are presented in the paper and an extreme analogue of the Ikomi-Schwartz lemma is obtained.