Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2021»
26–28 травня 2021 р., Львів

УДК 517.95, 511.2

ДВОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ТИПУ ЕЙЛЕРА

Ярослав Слоньовський, Володимир Ільків

Національний університет «Львівська політехніка», ilkivv@i.ua,
yaroslav.o.slonovskyi@lpnu.ua

В області $[t^-, t^+] \times \Omega^p_{2\pi}$, де $\Omega^p_{2\pi}$ — p-вимірний тор, $0 < t^- < t^+$, розглядається задача для рівняння з частинними похідними другого порядку

$$\big[t^2\partial_t^2 + ta(\partial_x)\partial_t + b(\partial_x)\big]u(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times \Omega^p_{2\pi}, \qquad (1)$$

де $a(\partial_x) = \sum_{|s|\le 1} a_s\partial_x^s$, $b(\partial_x) = \sum_{|s|\le 2} b_s\partial_x^s$, $a_s, b_s \in \mathbb{C}$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x^s = \partial_{x_1}^{s_1}\cdots\partial_{x_p}^{s_p}$, $d_{x_r} = \partial/\partial x_r$, $s = (s_1,\ldots,s_p)$, $|s| = s_1 + \cdots + s_p$. Розв'язок рівняння (1) заданий у два моменти часу t_0, t_1, де $t^- < t_0 < t_1 < t^+$, умовами

$$u(t_0,x) = \varphi_0(x), \quad u(t_1,x) = \varphi_1(x), \qquad x \in \Omega^p_{2\pi}. \qquad (2)$$

Розв'язок задачі (1), (2) шукається за допомогою відокремлення змінної t, тому зображується рядом $u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t)e^{ikx}$, де $kx = k_1x_1 + \cdots + k_px_p$. Розіб'ємо множину $\mathbb{Z}^p$ на дві множини $\mathbb{Z}^p = \mathcal{Z}_1 \sqcup \mathcal{Z}_2$, причому для векторів $k \in \mathcal{Z}_2$ корені характеристичного рівняння $\lambda^2+(a-1)\lambda+b = 0$ є простими і $\operatorname{Re}\lambda_1 \le \operatorname{Re}\lambda_2$, а для векторів $k \in \mathcal{Z}_1$ — двократними.

Знайдені функції $u_k(t)$ для $k \in \mathcal{Z}_1$ зображають формули

$$u_k(t) = t^{\lambda_1}\frac{\begin{pmatrix}1 & \ln t\end{pmatrix}}{\ln\tau}\begin{pmatrix}\ln t_1 & -\ln t_0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_0^{-\lambda_1}\varphi_{0k}\\ t_1^{-\lambda_1}\varphi_{1k}\end{pmatrix}, \qquad k \in \mathcal{Z}_1,$$

де $\tau = t_1/t_0$, $\ln\tau > 0$, а для $k \in \mathcal{Z}_2$ — формули

$$\begin{aligned}
u_k(t) &= \frac{\begin{pmatrix}t^{\lambda_1} & t^{\lambda_2}t_1^{\lambda_1-\lambda_2}\end{pmatrix}}{1-\tau^{\lambda_1-\lambda_2}}\begin{pmatrix}1 & -\tau^{\lambda_1-\lambda_2}\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_0^{-\lambda_1}\varphi_{0k}\\ t_1^{-\lambda_1}\varphi_{1k}\end{pmatrix}, \quad t_1 \le 1,\\
u_k(t) &= \frac{-\begin{pmatrix}t^{\lambda_1} & t^{\lambda_2}\end{pmatrix}}{1-\tau^{\lambda_1-\lambda_2}}\begin{pmatrix}-1 & t_0^{\lambda_2-\lambda_1}\\ t_1^{\lambda_1-\lambda_2} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_0^{-\lambda_1}\varphi_{0k}\\ t_1^{-\lambda_2}\varphi_{1k}\end{pmatrix}, \quad t_0 < 1 < t_1, \qquad (3)\\
u_k(t) &= \frac{\begin{pmatrix}t^{\lambda_1}t_0^{\lambda_2-\lambda_1} & t^{\lambda_2}\end{pmatrix}}{1-\tau^{\lambda_1-\lambda_2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -\tau^{\lambda_1-\lambda_2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_0^{-\lambda_2}\varphi_{0k}\\ t_1^{-\lambda_2}\varphi_{1k}\end{pmatrix}, \quad t_0 \ge 1.
\end{aligned}$$

Нехай компоненти вектора $\vec{b} = \big(b_{s(1)}, \ldots, b_{s(p)}\big)$ у рівнянні (1) належать кругу $Q^* = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| \le b^*\}$. Тоді залежні від k величини $\lambda_1(k)$, $\lambda_2(k)$, $D(k)$, $\Delta(k)$ залежать також і від цього вектора на множині Q^{*p}. Оскільки $|a(ik)| \le L_1\tilde{k}$ і $|b(ik)| \le L_1^2\tilde{k}^2$, то $|D(k)| \le L_2^2\tilde{k}^2$ і $|\lambda_j(k)| \le L_3\tilde{k}$, де додатні числа L_1, L_2, L_3 — не залежать від k та $\vec{b}$, а залежать від b^*.

Позначимо Q_0 — множину векторів (a_0, b_0), таку що для $(a_0, b_0) \in Q_0$ знаменник $\Delta(0) = 0$. У припущенні $(a_0, b_0) \notin Q_0$ для довільних достатньо малих $\varepsilon > 0$ і послідовності $\varepsilon_k \ge 0$, для яких $\sum_{k \ne 0} \varepsilon_k^2 = \varepsilon/2$, на множині $\vec{b} \in Q^{*p} \setminus Q$ знаменники у формулі (3) задовольняють нерівність

$$|1 - \tau^{\lambda_1 - \lambda_2}| \ge \min\Big(|\Delta(0)|, \frac{3}{8}, \frac{3}{4}L_4\tilde{k}^{1/2}\varepsilon_k\Big) \ge L_5\tilde{k}^{1/2}\varepsilon_k, \quad k \in \mathbb{Z}^p,$$

де $\operatorname{meas} Q \le \varepsilon$ і $L_4 = \dfrac{\ln\tau}{pL_2 b^{*(p-1)}\sqrt{m_0\pi^p}} > 0$, $L_5 > 0$.

Введемо простори $\Phi_{q,g}$ і $U_{q,G}$ з нормами $\|\varphi\|_{q,g}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \tilde{k}^{2q} g^{2\tilde{k}} |\varphi_k|^2$, $\|u\|_{q,G} = \sum_{r=0}^2 \max_t \|t^r \partial_t^r u(t,\cdot)\|_{q-r,G(t)}$, де $g > 0$ і G додатня функція.

Теорема. Якщо $\varphi_0 \in \Phi_{(p^*+3)/2, g_{0j}}$, $\varphi_1 \in \Phi_{(p^*+3)/2, g_{1j}}$, де $t_1 \le 1$, $g_{01} = t_0^{-\lambda_1^+}$, $g_{11} = t_1^{-\lambda_1^+}$ для $j = 1$, $t_0 < 1 < t_1$, $g_{02} = t_0^{-\lambda_1^+}$, $g_{12} = t_1^{\lambda_2^-}$ для $j = 2$, $t_0 \ge 1$, $g_{03} = t_0^{\lambda_2^-}$, $g_{13} = t_1^{\lambda_2^-}$ для $j = 3$, $p^* > p$ та $(a_0, b_0) \notin Q_0$ і виконується умова $-\lambda_0^-\tilde{k} \le \operatorname{Re}(\lambda_1 - \lambda_2) \le \lambda_0^+\tilde{k}$, $-\lambda_j^-\tilde{k} \le \operatorname{Re}\lambda_j \le \lambda_j^+\tilde{k}$, $j = 1, 2$, то для довільного $\varepsilon > 0$ існує така множина $Q \subset Q^{*p}$ з мірою $\operatorname{meas} Q \le \varepsilon$, що для довільного $\vec{b} \in \tilde{Q} \subset Q^{*p} \setminus Q$ існує єдиний розв'язок u задачі (1), (2) з простору U_{2,G_j} і справджуються оцінки

$$\|u\|_{2,G_j}^2 \le \frac{16L_6^2\zeta(p^*)}{\varepsilon L_5^2}\big(\|\varphi_0\|_{(p^*+3)/2,g_{0j}}^2 + \|\varphi_1\|_{(p^*+3)/2,g_{1j}}^2\big), \qquad j = 1, 2, 3,$$

де $\zeta(p^*) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}} \tilde{k}^{-p^*}$, з функціями $G_2(t) = \begin{cases} t^{\lambda_1^-}, & t \le 1, \\ t^{-\lambda_2^+}, & t \ge 1, \end{cases}$

$$G_1(t) = \begin{cases} t^{\lambda_1^-}, & t \le t_1, \\ t^{\lambda_2^-} t_1^{\lambda_0^-}, & t_1 \le t \le 1, \\ t^{-\lambda_2^+} t_1^{\lambda_0^-}, & t \ge 1, \end{cases} \quad G_3(t) = \begin{cases} t^{\lambda_1^-} t_0^{-\lambda_0^-}, & t \le 1, \\ t^{-\lambda_1^+} t_0^{-\lambda_0^-}, & 1 \le t \le t_0, \\ t^{-\lambda_2^+}, & t \ge t_0. \end{cases}$$

THE TWO-POINT PROBLEM FOR EULER TYPE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

A two-point problem for partial differential equations of the second order with coefficients dependent only on time variable (Euler type equation) is considered. This problem is ill posed, and its solvability is related to the problem of small denominators. Existence and uniqueness of the solution are established, based on lower bounds estimations for the small denominators.