Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2021»
26–28 травня 2021 р., Львів

УДК 512.6

ЛОКАЛЬНІ МАЙЖЕ-КІЛЬЦЯ НА ЕЛЕМЕНТАРНИХ АБЕЛЕВИХ ГРУПАХ ПОРЯДКУ p^3

І. Ю. Раєвська, М. Ю. Раєвська

Інститут математики НАН України, Україна
raeirina@imath.kiev.ua, raemarina@imath.kiev.ua

Мексоном [1] було доведено, що кожна нециклічна скінченна абелева p-група порядку, більшого за 4, є адитивною групою деякого нуль-симетричного локального майже-кільця, що не є кільцем. Мексоном сформульовано проблему пошуку єдиного набору відображень, що визначають всі неізоморфні локальні майже-кільця на цих групах. Ця проблема й досі залишається відкритою, як і проблема визначення кількості неізоморфних локальних майже-кілець на даній групі.

Нехай G — адитивна елементарна абелева група порядку p^3 з твірними a, b та c. Нехай R — локальне майже-кільце з одиницею, яке не є майже-полем, адитивна група R^+ якого ізоморфна групі G. Тоді $R^+ = \langle a \rangle + \langle b \rangle + \langle c \rangle$ для деяких $a,\ b,\ c \in R$, що задовольняють співвідношення $ap = bp = cp = 0$, $a+b = b+a$, $a+c = c+a$, $c+b = b+c$. Зокрема, кожний елемент $x \in R$ єдиним чином записується у вигляді $x = ax_1 + bx_2 + cx_3$ з коефіцієнтами $0 \le x_1 < p$, $0 \le x_2 < p$ та $0 \le x_3 < p$. Без втрати загальності, можна припустити, що a є одиницею в R, тобто $ax = xa = x$ для кожного $x \in R$. Більш того, для кожного $x \in R$ існують такі коефіцієнти $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\mu(x)$ та $\nu(x)$, що $xb = b\beta(x) + c\gamma(x)$ та $xc = b\mu(x) + c\nu(x)$.

Теорема 1. *Якщо x, $y \in R$, то*

$$xy = ax_1y_1 + b(x_2y_1 + \beta(x)y_2 + \mu(x)y_3) + c(x_3y_1 + \gamma(x)y_2 + \nu(x)y_3),$$

причому для відображень $\beta\colon R \to \mathbb{Z}_p$, $\gamma\colon R \to \mathbb{Z}_p$, $\mu\colon R \to \mathbb{Z}_p$ та $\nu\colon R \to \mathbb{Z}_p$ виконуються наступні твердження:

(0) $\beta(0) \equiv 0 \pmod p$, $\gamma(0) \equiv 0 \pmod p$, $\mu(0) \equiv 0 \pmod p$ *та* $\nu(0) \equiv 0 \pmod p$ *тоді і тільки тоді, коли майже-кільце R є нуль-симетричним*;

(1) $\beta(a) = 1,\ \gamma(a) = 0,\ \mu(a) = 0,\ \nu(a) = 1 \pmod p$;

(2) *якщо* $\beta(x) \equiv 0 \pmod p$ *та* $\mu(x) \equiv 0 \pmod p$, *то* $x_1 \equiv 0 \pmod p$;

(3) $\beta(xy) \equiv \beta(x)\beta(y) + \mu(x)\gamma(y) \pmod p$;

(4) $\gamma(xy) \equiv \gamma(x)\beta(y) + \nu(x)\gamma(y) \pmod{p}$;

(6) $\mu(xy) \equiv \beta(x)\mu(y) + \mu(x)\nu(y) \pmod{p}$;

(7) $\nu(xy) \equiv \gamma(x)\mu(y) + \nu(x)\nu(y) \pmod{p}$.

Далі, наведемо приклади майже-кільцевого множення.

Теорема 2. *Якщо $x = ax_1 + bx_2 + cx_3$ та $y = ay_1 + by_2 + cy_3 \in G$, то множення*

$$x \cdot y = ax_1y_1 + b(x_2y_1 + \beta(x)y_2) + c(x_3y_1 + \nu(x)y_2)$$

з одним з наступних наборів функцій

- $\beta(x) = 1$ *та* $\nu(x) = 1$;
- $\beta(x) = x_1$ *та* $\nu(x) = x_1$;
- $\beta(x) = x_1^2$ *та* $\nu(x) = x_1^2$;
- $\dots$
- $\beta(x) = x_1^{p-1}$ *та* $\nu(x) = x_1^{p-1}$

визначає локальне майже-кільце $R = (G, +, \cdot)$.

Теорема 3. *Існує щонайменше p неізоморфних локальних майже-кілець на елементарній абелевій групі порядку p^3.*

Отримані результати знайдуть застосування при вивченні недистрибутивних структур на цих групах та класифікації цих об'єктів. Локальні майже-кільця тісно пов'язані з брейсами, які дають розв'язки комбінаторних рівнянь Янга–Бакстера [2].

1. *Maxson C. J.* On the construction of finite local near-rings (I): on non-cyclic abelian p-groups, Quart. J. Math. Oxford (2). – 1970. – **21**. – P. 449–457.

2. *Rump W.* Set-theoretic solutions to the Yang-Baxter equation, skew-braces, and related near-rings // J. Algebra Appl. - 2019. - **18**, No. 8. - Article ID 1950145. - 22 p.

LOCAL NEARRINGS ON ELEMENTARY ABELIAN GROUPS OF ORDER p^3

This talk is devoted to the study of local nearrings whose additive groups are elementary Abelian groups of order p^3.