Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2021»
26–28 травня 2021 р., Львів

УДК 517.9

НЕЛОКАЛЬНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ НАД ПОЛЕМ P-АДИЧНИХ ЧИСЕЛ

Мар'яна Підківка[1], **Антон Кузь**[1,2]

[1]НУ "Львівська політехніка", [2]ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, kuz.anton87@gmail.com

Впродовж останніх десятиліть активно розвивається p-адична математична фізика, у якій дійсні просторово-часові змінні замінюються p-адичними числами [1]. Поле $\mathbb{Q}_p$ p-адичних чисел є поповнення поля $\mathbb{Q}$ за нормою $|\cdot|_p$, яка визначається формулою

$$|x|_p = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x = 0, \\ p^{-\gamma}, & \text{якщо} \quad x = p^{\gamma}\frac{m}{n}, \end{cases}$$

де $\gamma \in \mathbb{Z}$ та m, n є цілими числами, які не діляться на p, p — деяке фіксоване просте число [2].

Опишемо простори функцій з $\mathbb{Q}_p$ в $\mathbb{Q}_p$. Поліноми Ерміта p-адичної змінної $x \in \mathbb{Q}_p$ визначаємо рекурентними співвідношеннями

$$H_0(x) = 1,\ H_1(x) = 2x,\ H_n(x) = xH_{n-1}(x) - (n-1)H_{n-2}(x),\ n \geq 2. \quad (1)$$

Для поліномів Ерміта, означених формулами (1), над полем $\mathbb{Q}_p$ виконуються рівності

$$\mathcal{L}\left(\frac{d}{dx}\right) H_n(x) = 2nH_n(x), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (2)$$

де

$$\mathcal{L} := \mathcal{L}\left(\frac{d}{dx}\right) = -\frac{d^2}{dx^2} + 2x\frac{d}{dx}, \quad (3)$$

d/dx — стандартна операція диференціювання. $\mathcal{H} := \mathcal{H}(\mathbb{Q}_p)$ — простір функцій вигляду $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k H_k(x)$, $f_k \in \mathbb{Q}_p$, $k \in \mathbb{Z}_+$, із нормою [3]

$$\|f; \mathcal{H}\| = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} |f_k|_p \left|k! 2^k\right|_p. \quad (4)$$

Тут і надалі $K_R(x_0) := \left\{x \in \mathbb{Q}_p : |x - x_0|_p < R\right\}$, $R > 0$, — відкритий круг радіуса R, $K_R := K_R(0)$. Через $\mathcal{A}_{r,\mathcal{H}}$ позначимо простір функцій u

аналітичних за t в крузі K_r

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k t^k, \quad u_k \in \mathcal{H},$$

та неперервних на $\bar{K}_r$ із нормою $\|u; \mathcal{A}_{r,\mathcal{H}}\| = \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} r^k \|u_k; \mathcal{H}\|$.

Позначимо через $\mathcal{A}(K_R, \mathcal{H})$ простір функцій u таких, що $u \in \mathcal{A}_{r,\mathcal{H}}$ для деякого $0 < r \leq R$.

Зафіксуємо круг радіуса $\widetilde{R} > 0$ в $\mathbb{Q}_p$. В цьому крузі розглядаємо таку задачу: знайти функцію u з класу $\mathcal{A}(K_{\widetilde{R}}, \mathcal{H})$, яка в просторі $\mathcal{H}$ задовольняє рівності

$$u''(t) + b^2\mathcal{L}^2[u] = 0, \quad t \in K_{\widetilde{R}}, \tag{5}$$

$$u(0) - \mu u(T) = \varphi, \quad u' - \mu u'(T) = \psi, \quad j = 1, 2, \quad T \leq R < \widetilde{R}, \tag{6}$$

де $b, \mu \in \mathbb{Q}_p$, $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$, μ – фіксоване число, $\mathcal{L}^2[u] = \mathcal{L}[\mathcal{L}[u]]$, оператор $\mathcal{L}$ визначений формулою (3).

Теорема 1. *Нехай виконується умова $|b|_p \cdot \tilde{R}p^{1/(p-1)} < 1$, $|\mu|_p \neq 1$ і $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$, $j = 1, \ldots, n$. Тоді існує єдиний розв'язок u задачі (1), (2), який належить простору $A(K_{\tilde{R}}; \mathcal{H})$. Цей розв'язок неперервно залежить від функцій φ, ψ, причому виконується оцінка*

$$\|u; A(K_{\tilde{R}}; \mathcal{H})\| \leqslant C \max\{\|\varphi; \mathcal{H}\|, \|\psi; \mathcal{H}\|\}.$$

1. *Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И.* p-адический анализ и математическая физика. – М.: Физматлит, 1994. – 352 с.

2. *Koblitz N.* p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions, Graduate Texts in Mathematics 58 (2nd ed.) – Springer, 1984. – 153 p. doi: 10.1007/978-1-4612-1112-9

3. *Khrennikov A.* Yu. p-Adic Valued Distributions in Mathematical Physics. – Kluwer, Dordrecht, 1994. – 264 p. https://doi.org/10.1007/978-94-015-8356-5

NONLOCAL BOUNDARY PROBLEMS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OVER P-ADIC NUMBER FIELD

The paper deals with a problem with integral conditions with respect to the chosen variable for a second order linear differential-operator equation with the Hermite differential operator over the field of p-adic numbers. The space of analytic functions over non-archimedean functional space builded by Hermite polynomials is described. The solution of the problem was built in a form of series of Hermite polynomials