Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2021»
26–28 травня 2021 р., Львів

УДК 517.9

ЗАДАЧА З НЕЛОКАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ РІВНЯННЯ БЛЕКА-ШОУЛЗА

Марія Мац[1], Антон Кузь[1,2]

[1]НУ "Львівська політехніка" , [2]ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, kuz.anton87@gmail.com

У області $\{(t, x), 0 < t < T, x > 0\}$ розглядається задача побудови обмеженого за змінною x розв'язку рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bx \frac{\partial u}{\partial x} + cu, \quad 0 < t < T, \quad x > 0, \tag{1}$$

яке при $a = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, $b = r$, $c = -r$ співпадає з рівнянням Блека-Шоулза [1] та умовою

$$\int_0^T u(t, x) dt = \varphi(x), \quad x > 0, \tag{2}$$

де $\varphi(x)$ — деяка задана достатньо гладка функція.

Позначимо:

$$\alpha = c - \frac{(b - a^2)^2}{4a^2}, \quad \beta = -\frac{b - a^2}{4a^2}. \tag{3}$$

Також будемо вимагати, щоб для функції $\varphi(x)$ виконувалась умова

$$\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\xi^{\beta+1}} d\xi < +\infty. \tag{4}$$

Теорема 1. *Нехай у рівнянні* (1) $c \leqslant 0$ *і виконується умова* (4). *Тоді функція визначена формулою*

$$u(t, x) = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\xi} G\left(t - T, \frac{x}{\xi}\right) d\xi, \tag{5}$$

де

$$G(\tau, \eta) = \frac{1}{2\pi} \eta^{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(a^2\omega^2 - \alpha)}{e^{(a^2\omega^2-\alpha)T} - 1} e^{-(a^2\omega^2-\alpha)\tau + i\omega \ln(\eta)} d\omega, \tag{6}$$

де $x, \xi > 0$ *є розв'язком задачі* (1), (2).

Теорема 2. *За умови теореми 1 функція* $G\left(t-T, \dfrac{x}{\xi}\right)$, *як функція змінних* (t,x) *задовольняє рівняння*

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a^2 x^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + bx\frac{\partial G}{\partial x} + cG,$$

крім того виконується рівність

$$\int\limits_0^T G\left(t-T, \frac{x}{\xi}\right) dt = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x}{\xi}\right)^{\beta} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(\ln x - \ln \xi)} d\omega.$$

З результатів теорем 1, 2 випливає, що функцію $G\left(t-T, \dfrac{x}{\xi}\right)$ можна вважати фундаментальним розв'язком задачі (1), (2).

За умови $\alpha \leqslant 0$, розв'язок задачі (1), (2) можна також зобразити у вигляді

$$u(t,x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\xi} \sum_{k=0}^{\infty} J\left(t+kT, \frac{x}{\xi}\right) d\xi,$$

$$J\left(t+kT, \frac{x}{\xi}\right) =$$

$$= \left(\frac{x}{\xi}\right)^{\beta} \left(\frac{-4\alpha a^4 (t+kT)^2 + 2a^2(t+kT) - \ln^2(x/\xi)}{4a^5 (t+kT)^{5/2}}\right) e^{-\frac{\ln^2(x/\xi)}{4a^2(t+kT)} + \alpha(t+kT)}.$$

1. *F.Black, M.Scholes*, The Pricing of Options and Corporate Liabilities, Journal of Political Economy (1973), 81(3), 637-654.

PROBLEM WITH NONLOCAL CONDITIONS FOR BLACK-SCHOLES EQUATION

The solution of the problem with integral condition with respect to time variable for the Black-Scholes equation using the Fourier transform is constructed.