Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2021»,
26–28 травня 2021 р., Львів

УДК 512.548.7

ПРО ГРУПОВІ ІЗОТОПИ З ВЛАСТИВІСТЮ СХРЕЩЕНОЇ ОБОРОТНОСТІ

Алла Луценко

Донецький національний університет імені Василя Стуса,
e-mail: lucenko.alla32@gmail.com

Алгебра $(Q;\circ;\overset{\ell}{\circ};\overset{r}{\circ})$ називається *квазігрупою*, якщо виконуються тотожності $(x\circ y)\overset{\ell}{\circ}y=x$, $(x\overset{\ell}{\circ}y)\circ y=x$, $x\overset{r}{\circ}(x\circ y)=y$, $x\circ(x\overset{r}{\circ}y)=y$

Операція $(\circ)$ називається *головною*, а $(\overset{\ell}{\circ})$, $(\overset{r}{\circ})$ – *лівим* та *правим діленням*. Квазігрупа $(Q;\cdot)$ має [3] *середню*, *ліву*, *праву властивість схрещеної оборотності* (CIP), якщо відповідно існують *середня* (MCIP), *ліва* (LCIP), і *права* (RCIP), *функції*, *оборотності* ψ, υ, γ такі, що для всіх *x, y* виконуються відповідні рівності $\psi(x)\cdot yx=y$; $yx\cdot y=\upsilon(x)$; $y\cdot xy=\gamma(x)$.

Нехай *(Q;∘)* ізотоп деякої групи (груповий ізотоп) і нехай $0\in Q$, тоді

$$x\circ y=\alpha x+a+\beta y$$

називається 0-*канонічним розкладом*, якщо $(Q;+,0)$ є групою і $\alpha 0=\beta 0=0$. В кожному груповому ізотопі довільний елемент 0 однозначно визначає його 0-канонічний розклад [1].

Теорема 1. *Нехай* $(Q;\circ)$ *– груповий ізотоп і (2) його канонічний розклад, тоді:*

1) $(Q;\circ)$ *є MCIP квазігрупою з функцією оборотності* ψ *тоді і тільки тоді, коли* α *є анти-автоморфізмом групи* $(Q;+)$ *та* $\beta=\alpha^{-1}$. *Функція оборотності в MCIP обчислюється за формулою* $\psi(x)=-\alpha^{-2}a-\alpha^{-3}x-\alpha^{-1}a$*;*
2) $(Q;\circ)$ *є LCIP квазігрупою з функцією оборотності* υ *тоді і тільки тоді, коли* α *є анти-автоморфізмом групи* $(Q;+)$ *та* $\beta=I_aJ\alpha^2$. *Функція оборотності в LCIP обчислюється за формулою*

$\upsilon(x) = \alpha\beta x + \alpha a + a.$

3) $(Q;\circ)$ *є RCIP квазігрупа з функцією оборотності* γ *тоді і тільки тоді, коли* β *є анти-автоморфізмом групи* $(Q;+)$ *і* $\alpha = I_a^{-1}J\beta^2$.

Функція оборотності в RCIP обчислюється за формулою $\gamma(x) = a + \beta a + \beta\alpha x$.

Теорема 2. [2] *Кожна квазігрупа порядку m, яка лінійна над циклічною групою ізоморфна точно одній з таких квазігруп* $(\mathbb{Z}_m;\circ)$, *де* $\mathbb{Z}_m$ *є кільцем за модулем m,* $x \circ y = ax + c + by$, a , b *взаємно прості з m, і c є спільним дільником m та a+b-1.*

Наслідок 1. Нехай $(\mathbb{Z}_m;+,\cdot)$ – кільце за модулем m та $(\mathbb{Z}_m;\circ)$ є груповим ізотопом з канонічним розкладом $x \circ y = ax + c + by$, де c є спільним дільником m і $a + b - 1$, тоді:

1) $(\mathbb{Z}_m;\circ)$ є серединьою CIP квазігрупою тоді і тільки тоді, коли $ab = 1$ в $\mathbb{Z}_m$. Функцією оборотності є $\psi(x) = -b^2 - b^3x - bc$;

2) $(\mathbb{Z}_m;\circ)$ є лівою CIP квазігрупою тоді і тільки тоді, коли $a^2 + b = 0$ в $\mathbb{Z}_m$. Функцією оборотності є $\upsilon(x) = abx + ac + c$;

3) $(\mathbb{Z}_m;\circ)$ є правою CIP квазігрупою тоді і тільки тоді, коли $a + b^2 = 0$ in $\mathbb{Z}_m$. Функцією оборотності є $\gamma(x) = c + bc + bax$.

Приклад 1. Квазігрупа $(\mathbb{Z}_7;\circ)$, де $x \circ y := 3x + 2 + 5y$ над полем $\mathbb{Z}_7$, є лівою, правою, серединьою CIP квазігрупою. Але середня ψ , ліва υ та права γ функції оборотності різні:

$$\psi(x) := x + 4, \qquad \upsilon(x) := x + 1, \qquad \gamma(x) := x + 5 .$$

1. *Сохацький Ф. М.* Про ізотопи груп II // Укр. мат. журн. − 1995. −Т. 47, № 12. — С. 1692−1703.
2. *Sokhatsky F., Syvakivskyj P.* On linear isotopes of cyclic groups, Quasigroups and related systems, Vol. 1, no.1 (1994), 66-76.
3. *Sokhatsky F.M., A.V. Lutsenko,* Classification of quasigroups according to directions of translations II. Comment. Math. Univ. Carolin. (In English, unpublished).

ABOUT GROUP ISOTOPES WITH CROSS INVERSE PROPERTY

The conditions under which CI quasigroups are isotopic groups are found. An example is constructed that demonstrates the fulfillment of the conditions of the theorem and all invertibility functions are found.