Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2021»
26–28 травня 2021 р., Львів

УДК 517.958:512.816

Ліївські симетрії лінійних систем двох диференціальних рівнянь другого порядку з залежними від часу коефіцієнтами

Олександра В. Локазюк

Інститут математики НАН України, Київ, Україна,
sasha.lokazuik@gmail.com

У рамках групового аналізу диференціальних рівнянь досліджуємо клас $\bar{\mathcal{L}}$ нормальних лінійних систем з n звичайних диференціальних рівнянь другого порядку [1]

$$\boldsymbol{x}_{tt} = A(t)\boldsymbol{x}_t + B(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \tag{1}$$

з n невідомими функціями $x^1, \ldots, x^n$, $\boldsymbol{x}(t) = \big(x^1(t), \ldots, x^n(t)\big)^{\mathsf{T}}$, де $n \geqslant 2$. Набір $\theta = (A, B, \boldsymbol{f})$ довільних елементів класу $\bar{\mathcal{L}}$ утворюють довільні гладкі $n \times n$ матричнозначні функції A та B змінної t і довільна гладка векторнозначна функція $\boldsymbol{f}$ змінної t.

Кожну фіксовану систему $\bar{L}_\theta$ з класу (1) за допомогою перетворень еквівалентності можна відобразити в систему з того ж класу, де $\tilde{A} = 0$, $\tilde{B} = H\big(B - \frac{1}{2}A_t + \frac{1}{4}A^2\big)H^{-1} =: V$ та $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$, тобто у систему

$$L'_V\colon \quad \boldsymbol{x}_{tt} = V(t)\boldsymbol{x}, \tag{2}$$

де V — довільна гладка $n \times n$ матричнозначна функція змінної t. Позначимо клас систем вигляду (2) як $\mathcal{L}'$.

На сьогодні відомі лише окремі результати щодо симетрійних та трансформаційних властивостей систем з класу $\bar{\mathcal{L}}$. Ліївські симетрії систем з класу $\bar{\mathcal{L}}$ з $A = 0$ та сталою матрицею B при $n \leqslant 6$ розглянуто в серії робіт С. Вафа Соха, Р. Кампоамор-Стурсберга, С.В. Мелешка та ін. (тут і нижче див. посилання в [1, 2]). Задачу групової класифікації таких систем у випадку довільного $n \geqslant 2$ вичерпно розв'язано в [2]. Дослідження симетрійних властивостей систем з класу $\bar{\mathcal{L}}$ з $n = 2$ ініційовано С. Вафом Сохом у 2000 році і продовжено пізніше у роботах С.В. Мелешко зі співавторами у 2013–2015 роках.

У доповіді буде вперше представлено вичерпну групову класифікацію систем з класу $\mathcal{L}'$ у випадку $n = 2$ над дійсним полем. Будь-яка система L'_V з матрицею V, пропорційною одиничній матриці E, належить орбіті $\mathcal{L}'_0$ елементарної системи $\boldsymbol{x}_{tt} = \boldsymbol{0}$. Таким чином, необхідно розглянути лише підклас $\mathcal{L}'_1$, який є доповненням до $\mathcal{L}'_0$ у класі $\mathcal{L}'$.

Максимальна алгебра ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_V$ будь-якої системи L'_V з класу $\mathcal{L}'_1$ є напівпрямою сумою $\mathfrak{g}_V = \mathfrak{g}_V^{\rm ess} \Subset \mathfrak{g}_V^{\rm lin}$, де $\mathfrak{g}_V^{\rm lin}$ — абелевий ідеал, який пов'язаний з лінійною суперпозицією розв'язків, а $\mathfrak{g}_V^{\rm ess}$ — його доповняльна підалгебра, яку називають суттєвою алгеброю ліївської інваріантності системи L'_V.

Теорема 1. *Повний список $G^\sim_{\mathcal{L}'}$-нееквівалентних суттєвих розширень ліївської симетрії у класі $\mathcal{L}'_1$ з $n = 2$ вичерпують випадки:*

0. Загальний випадок $V(t)$: $\mathfrak{g}_V^{\rm ess} = \langle I\rangle$;
1. $V = v(t)S_1$: $\mathfrak{g}_V^{\rm ess} = \langle I,\, x^2\partial_{x^1}\rangle$;
2. $V = v(t)(S_1 + S_3)$: $\mathfrak{g}_V^{\rm ess} = \langle I,\, x^1\partial_{x^2} - x^2\partial_{x^1}\rangle$;
3. $V = v(t)S_2$: $\mathfrak{g}_V^{\rm ess} = \langle I,\, x^1\partial_{x^1} - x^2\partial_{x^2}\rangle$;
4. $V = \varepsilon E + (\beta_1 - 2\beta_2 t + \beta_3 t^2)S_1 + (\beta_2 - \beta_3 t)S_2 + \beta_3 S_3$, $(\beta_2, \beta_3) \neq (0, 0)$: $\mathfrak{g}_V^{\rm ess} = \langle I,\, \partial_t + x^2\partial_{x^1}\rangle$;
5. $V = \varepsilon E + \mu(S_1 + S_3) + \nu\cos(2t)(S_1 - S_3) + \nu\sin(2t)S_2$, $\nu \neq 0$: $\mathfrak{g}_V^{\rm ess} = \langle I,\, \partial_t + x^2\partial_{x^1} - x^1\partial_{x^2}\rangle$;
6. $V = \varepsilon E + \beta_1 {\rm e}^{2t} S_1 + \beta_2 S_2 + \beta_3 {\rm e}^{-2t} S_3$, $(\beta_1\beta_2, \beta_2\beta_3, \beta_3\beta_1) \neq (0, 0, 0)$: $\mathfrak{g}_V^{\rm ess} = \langle I,\, \partial_t + x^1\partial_{x^1} - x^2\partial_{x^2}\rangle$;
7. $V = \varepsilon E + S_1 + S_3$: $\mathfrak{g}_V^{\rm ess} = \langle I,\, x^1\partial_{x^2} - x^2\partial_{x^1},\, \partial_t\rangle$;
8. $V = \varepsilon E + {\rm e}^{2\gamma t} S_1$, $4\varepsilon \neq \gamma^2$: $\mathfrak{g}_V^{\rm ess} = \langle I,\, x^2\partial_{x^1},\, \partial_t + \gamma(x^1\partial_{x^1} - x^2\partial_{x^2})\rangle$;
9. $V = \varepsilon E + S_2$: $\mathfrak{g}_V^{\rm ess} = \langle I,\, x^1\partial_{x^1} - x^2\partial_{x^2},\, \partial_t\rangle$;
10. $V = S_1$: $\mathfrak{g}_V^{\rm ess} = \langle I,\, x^2\partial_{x^1},\, \partial_t,\, t\partial_t + 2x^1\partial_{x^1}\rangle$.

Тут $S_1 = \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$, $S_2 = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$, $S_3 = \left(\begin{smallmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right)$, $\varepsilon, \gamma, \mu, \nu, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$, $I := x^1\partial_{x^1} + x^2\partial_{x^2}$, $v = v(t)$ — *довільна гладка функція з* $\tau v_t \neq (\kappa - 2\tau_t)v$ *для будь-якої сталої* $\kappa \in \mathbb{R}$ *та будь-якої функції* $\tau = \tau(t)$ *з* $\tau_{ttt} = 0$. *З точністю до $G^\sim_{\mathcal{L}'}$-еквівалентності можна вважати, що* $\beta_2 = 0$ *при* $\beta_3 \neq 0$ *або* $\beta_1 = 0$ *при* $\beta_3 = 0$ *та* $\beta_2 \neq 0$ *у випадку 4, одне з ненульових* β_1 *або* β_3 *дорівнює* 1 *у випадку 6,* $\gamma \in \{0, 1\}$ *у випадку 8 та* $\nu > 0$ *у випадку 5.*

1. *Boyko V.M., Lokaziuk O.V., Popovych R.O.* Admissible transformations and Lie symmetries of linear systems of second-order ordinary differential equations, in preparation.
2. *Boyko V.M., Popovych R.O., Shapoval N.M.* Lie symmetries of systems of second-order linear ordinary differential equations with constant coefficients // J. Math. Anal. Appl. – 2013. – **397**. – 434–440; arXiv:1203.0387.

Lie symmetries of linear systems of two second-order ordinary differential equations with time-dependent coefficients

We study admissible transformations between normal linear systems of second-order ordinary differential equations and solve the group classification problem for such systems in the case of two dependent variables.