

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДЕФОРМУВАННЯ ТРИШАРОВОЇ ОВАЛЬНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ

Олексій Кудін¹, Євген Сторожук²

¹Запорізький національний університет, avk256@gmail.com;

²Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, stevan@ukr.net

Розглянемо нескінченно довгу незамкнену тришарову циліндричну оболонку овалного поперечного перерізу, навантажену рівномірним нормальним тиском інтенсивності $q = const$. Віднесемо оболонку до криволінійної ортогональної системи координат (x, s, z) , де x, s, z – довжини твірної, напрямної і нормалі серединної поверхні заповнювача; $-\delta \leq s \leq \delta$.

Кривина овалу змінюється вздовж напрямної за законом: $k = k_0(1 - \xi \cos 2k_0 s)$. Тут $k_0 = 1/r_0 = 2/(a+b)$; $\xi = 3(a-b)/(a+b)$; a, b – півосі поперечного перерізу.

Основні співвідношення подамо згідно теорії пологих оболонок і гіпотези ламаної лінії [1]. Деформування обшивок описується з використанням гіпотез Кірхгофа–Лява, а заповнювача – гіпотез Тимошенка.

Розподіл переміщень в межах обшивок і заповнювача має вигляд:

$$\begin{aligned} u^{(1)} = u + c\vartheta - (z - c) \frac{dw}{ds}; \quad u^{(2)} = u - c\vartheta - (z + c) \frac{dw}{ds}; \quad u^{(3)} = u + z\vartheta; \\ w^{(1)} = w^{(2)} = w^{(3)} = w, \end{aligned} \quad (1)$$

де u, w – тангенціальне переміщення і прогин точок серединної поверхні заповнювача; ϑ – кут повороту його нормалі; $h_3 = 2c$ – товщина заповнювача; тут і нижче величини з індексами 1 і 2 відносяться до зовнішньої і внутрішньої обшивок, а 3 – до заповнювача.

Система розв'язувальних рівнянь для випадку, коли обшивки мають однакову товщину ($h_1 = h_2 = h_0$) і виготовлені з одного і того ж матеріалу ($E_1 = E_2 = E_0$; $\nu_1 = \nu_2 = \nu_0$), набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[D_N \left(\frac{du}{ds} + kw \right) \right] = 0; \quad a_1 \frac{d^4 w}{ds^4} + a_2 \frac{d^3 \vartheta}{ds^3} - k D_N \left(\frac{du}{ds} + kw \right) = -q; \\ b_1 \frac{d^3 w}{ds^3} + b_2 \frac{dw}{ds} + b_3 \frac{d^2 \vartheta}{ds^2} + b_4 \vartheta = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2021»,
26–28 травня 2021 р., Львів**

$$\begin{aligned} \text{Тут } a_1 &= -ch_0 D_N^{(0)} - 2D_M^{(0)}; \quad a_2 = D_M^{(3)} + 2c^2 D_N^{(0)} + 2cD_K^{(0)}; \quad b_1 = -ch_0 D_N^{(0)}; \\ b_2 = b_4 &= -D_Q^{(3)}; \quad b_3 = D_M^{(3)} + 2c^2 D_N^{(0)}; \quad D_N = \frac{2E_0 h_0}{1-\nu_0^2} + \frac{E_3 h_3}{1-\nu_3^2}; \quad D_N^{(0)} = \frac{E_0 h_0}{1-\nu_0^2}; \\ D_M^{(0)} &= \frac{E_0 h_0^3}{3(1-\nu_0^2)}; \quad D_M^{(3)} = \frac{E_3 h_3^3}{12(1-\nu_3^2)}; \quad D_K^{(0)} = \frac{E_0 h_0^2}{2(1-\nu_0^2)}; \quad D_Q^{(3)} = G_{sz}^{(3)} h_3; \end{aligned}$$

$E_1, E_2, E_3, G_{sz}^{(3)}, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ – пружні сталі матеріалів обшивок і заповнювача.

Розв'язавши систему (2), знайдемо узагальнені переміщення:

$$\begin{aligned} w &= B_0 + B_1 s + B_2 s^2 + B_3 s^3 + B_4 s^4 + B_5 \cos 2k_0 s + C_6 sh \lambda s + C_7 ch \lambda s; \\ \vartheta &= a_0 \frac{dw}{ds} + \frac{\xi C_1}{8a_2 k_0^2} \sin 2k_0 s - \frac{Ps^3}{6} + \frac{C_2 s^2}{2} + C_3 s + C_4; \quad (3) \\ u &= \frac{s}{D_N} C_1 - \int k w ds + C_8, \end{aligned}$$

де $\lambda^2 = -a_4 / a_3 > 0$; $a_0 = -a_1 / a_2$; $a_3 = b_1 + a_0 b_3$; $a_4 = b_2 + a_0 b_4$;
 $b_5 = -b_3 / a_3$; $b_6 = -b_4 / a_3$; $b_7 = b_5 + b_6 / \lambda^2$; $B_0 = (b_7 P - b_6 C_3) / \lambda^4 - C_5 / \lambda^2$;
 $B_1 = -(b_7 C_2 + b_6 C_4) / \lambda^4 - C_5 / \lambda^2$; $B_2 = (b_7 P - b_6 C_3) / 2\lambda^2$; $B_3 = -b_6 C_3 / 6\lambda^2$;
 $B_4 = b_6 P / 24\lambda^2$; $B_5 = \xi(b_6 - 4b_5 k_0^2) C_1 / 16a_2 k_0^3 (4k_0^2 + \lambda^2)$; $P = (q - k_0 C_1) / a_2$.

Сталі інтегрування C_1, C_2, \dots, C_8 визначаємо з граничних умов на повздожніх краях оболонки $s = \pm \delta$.

Отриманий в роботі точний розв'язок може бути використаний при оцінці міцності і жорсткості тришарових елементів конструкцій овального поперечного перерізу, а також може бути еталонним для наближених і чисельних методів.

1. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.

MATHEMATICAL MODELING OF DEFORMATION OF A THREE-LAYER OVAL CYLINDRICAL SHELL

The statement is given and the exact solution of the boundary value problem for a three-layer long cylindrical shell of an oval cross-section under the action of a static load is obtained. The system of solving equations is written based on the theory of shallow shells and the broken line hypothesis.