**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2021»,
26–28 травня 2021 р., Львів**

УДК 512, 519.2

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ІЗ ЗНАЧЕННЯМИ У БІГІПЕРБОЛІЧНІЙ АЛГЕБРІ

Таміла Коломієць, Анатолій Погоруй

Житомирський державний університет імені Івана Франка,
tamila.kolomiiets@gmail.com, pogor@zu.edu.ua

В останні роки тема розширення основних положень теорії ймовірностей та математичної статистики, а також понять класичної міри з дійсних на гіперкомплексні числа, активно досліджуються у зв'язку з можливими застосуваннями в математиці та фізиці. [1, 2, 3, 4]. У цій роботі розширено поняття ймовірнісної міри на випадок, коли міра приймає значення в алгебрі бігіперболічних чисел

$$\mathbb{W}_4 = \{a_0 + a_1\boldsymbol{e} + a_2\boldsymbol{f} + a_3\boldsymbol{g}, a_i \in \mathbb{R}, i = 0,1,2,3\},$$

де $\boldsymbol{e}^2 = \boldsymbol{f}^2 = \boldsymbol{g}^2 = 1, \boldsymbol{ef} = \boldsymbol{fe} = \boldsymbol{g}, \boldsymbol{eg} = \boldsymbol{ge} = \boldsymbol{f}, \boldsymbol{fg} = \boldsymbol{gf} = \boldsymbol{e}$.

Лема 1 [5]. *Кожне бігіперболічне число $\boldsymbol{\alpha}$ можна подати у вигляді*

$$\boldsymbol{\alpha} = r_1\boldsymbol{i}_1 + r_2\boldsymbol{i}_2 + r_3\boldsymbol{i}_3 + r_4\boldsymbol{i}_4,$$

де $\boldsymbol{i}_k$ – ідемпотенти алгебри $\mathbb{W}_4$, $r_k \in \mathbb{R}$, $k = 1,2,3,4$.

Введемо на $\mathbb{W}_4$ відношення часткового порядку $\preccurlyeq$ таким чином: $\boldsymbol{\alpha} \preccurlyeq \boldsymbol{\beta} \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{W}_4^+ := \{x_1\boldsymbol{i}_1 + x_2\boldsymbol{i}_2 + x_3\boldsymbol{i}_3 + x_4\boldsymbol{i}_4 | \, x_k \geq 0, k = 1,2,3,4\}$. Якщо $\boldsymbol{\alpha} \preccurlyeq \boldsymbol{\beta}$, але $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta}$, то позначаємо $\boldsymbol{\alpha} \prec \boldsymbol{\beta}$. Позначимо через $A_{\boldsymbol{x}}$ множину бігіперболічних чисел, які є $\mathbb{W}_4$-непорівнюваними з $\boldsymbol{x} \in \mathbb{W}_4$.

Означення 1. $\mathbb{W}_4$*-значним модулем бігіперболічного числа* $\boldsymbol{\alpha} = r_1\boldsymbol{i}_1 + r_2\boldsymbol{i}_2 + r_3\boldsymbol{i}_3 + r_4\boldsymbol{i}_4$ *будемо називати величину*

$$|\boldsymbol{\alpha}|_{\mathbb{W}_4} = |r_1\boldsymbol{i}_1 + r_2\boldsymbol{i}_2 + r_3\boldsymbol{i}_3 + r_4\boldsymbol{i}_4|_{\mathbb{W}_4} = |r_1|\boldsymbol{i}_1 + |r_2|\boldsymbol{i}_2 + |r_3|\boldsymbol{i}_3 + |r_4|\boldsymbol{i}_4 \in \mathbb{W}_4^+,$$

де $|r_1|$, $|r_2|$, $|r_3|$, $|r_4|$ є звичайними модулями від дійсних чисел.

Означення 2. *Послідовність бігіперболічних чисел $\{\boldsymbol{\alpha}_n\}_{n\geq 1}, n \in \mathbb{N}$ будемо називати збіжною до $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{W}_4$, якщо для $\forall \varepsilon \in \mathbb{W}_4^+\backslash\{0\}$ $\exists N \in \mathbb{N}$: $|\boldsymbol{\alpha}_n - \boldsymbol{\alpha}|_{\mathbb{W}_4} \prec \varepsilon$ для всіх $n > N$. Позначається $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\alpha}$.*

Означення 3. *Нехай (Ω, Σ) – вимірний простір. Функція $\boldsymbol{P}_{\mathbb{W}_4}: \Sigma \to \mathbb{W}_4$ називається $\mathbb{W}_4$-значною ймовірнісною мірою (або бігіперболічною ймовірністю) на σ-алгебрі подій Σ, якщо виконуються умови:*

1) $\boldsymbol{P}_{\mathbb{W}_4}(A) \succcurlyeq 0, \forall A \in \Sigma$;
2) $\boldsymbol{P}_{\mathbb{W}_4}(\Omega) = \boldsymbol{\zeta}$, *де* $\boldsymbol{\zeta} = 1, \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3, \boldsymbol{i}_4$;
3) *Для довільної послідовності $\{A_n, n \geq 1\} \subset \Sigma$ попарно несумісних випадкових подій має місце $\boldsymbol{P}_{\mathbb{W}_4}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{P}_{\mathbb{W}_4}(A_n)$.*

Триплет $(\Omega, \Sigma, \boldsymbol{P}_{\mathbb{W}_4})$ називається $\mathbb{W}_4$-ймовірнісним простором.

Кожна $\mathbb{W}_4$-значна ймовірнісна міра може бути зображена у вигляді

$$\boldsymbol{P}_{\mathbb{W}_4}(A) = P_1(A)\boldsymbol{i}_1 + P_2(A)\boldsymbol{i}_2 + P_3(A)\boldsymbol{i}_3 + P_4(A)\boldsymbol{i}_4,$$

де $P_1(A), P_2(A), P_3(A), P_4(A)$ є $\mathbb{R}$-значними ймовірнісними мірами.

Топологія, індукована бігіперболічною нормою $\|\cdot\|_{\mathbb{W}_4}$ у $\mathbb{W}_4$ породжує борелевську σ-алгебру $\mathfrak{B}_{\mathbb{W}_4}$ на $\mathbb{W}_4$.

Означення 4. *Нехай $\left(\Omega, \Sigma, \boldsymbol{P}_{\mathbb{W}_4}\right)$ – $\mathbb{W}_4$-ймовірнісний простір. Функція $\boldsymbol{X}_{\mathbb{W}_4}(\omega): \Omega \to \mathbb{W}_4$ така що $\boldsymbol{X}_{\mathbb{W}_4}^{-1}(A) \in \Sigma$ для кожної відкритої множини A у $\mathbb{W}_4$ називається $\mathbb{W}_4$-значною випадковою величиною. Тобто, $\mathbb{W}_4$-значна випадкова величина є $\mathbb{W}_4$-значною вимірною функцією на Ω.*

Кожну $\mathbb{W}_4$-значну випадкову величину $\boldsymbol{X}_{\mathbb{W}_4}(\omega)$ можна записати у вигляді:

$$\boldsymbol{X}_{\mathbb{W}_4}(\omega) = X_1(\omega)\boldsymbol{i}_1 + X_2(\omega)\boldsymbol{i}_2 + X_3(\omega)\boldsymbol{i}_3 + X_4(\omega)\boldsymbol{i}_4,$$

де $X_1(\omega), X_2(\omega), X_3(\omega), X_4(\omega)$ є $\mathbb{R}$-значними випадковими величинами на Ω.

Теорема 1. *$\mathbb{W}_4$-значна функція $\boldsymbol{X}_{\mathbb{W}_4}(\omega)$ на вимірному просторі (Ω, Σ) є $\mathbb{W}_4$-значною випадковою величиною тоді і тільки тоді, коли $\left\{\omega \in \Omega \middle| \boldsymbol{X}_{\mathbb{W}_4}(\omega) \succ \boldsymbol{x} \text{ або } \boldsymbol{X}_{\mathbb{W}_4}(\omega) \in A_{\boldsymbol{x}}\right\} \in \Sigma$ для всіх $\boldsymbol{x} \in \mathbb{W}_4$.*

Теорема 2. *Нехай $\boldsymbol{X}_{\mathbb{W}_4}(\omega)$ є $\mathbb{W}_4$-значною випадковою величиною на $\left(\Omega, \Sigma, \boldsymbol{P}_{\mathbb{W}_4}\right)$. Тоді еквівалентними є умови:*

(i) $\left\{\omega \in \Omega \middle| \boldsymbol{X}_{\mathbb{W}_4}(\omega) \preccurlyeq \boldsymbol{x}\right\} \in \Sigma$ *для* $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{W}_4$;

(ii) $\left\{\omega \in \Omega \middle| \boldsymbol{X}_{\mathbb{W}_4}(\omega) \succ \boldsymbol{x} \text{ або } \boldsymbol{X}_{\mathbb{W}_4}(\omega) \in A_{\boldsymbol{x}}\right\} \in \Sigma$ *для* $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{W}_4$;

(iii) $\left\{\omega \in \Omega \middle| \boldsymbol{X}_{\mathbb{W}_4}(\omega) \succcurlyeq \boldsymbol{x} \text{ або } \boldsymbol{X}_{\mathbb{W}_4}(\omega) \in A_{\boldsymbol{x}}\right\} \in \Sigma$ *для* $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{W}_4$;

(iv) $\left\{\omega \in \Omega \middle| \boldsymbol{X}_{\mathbb{W}_4}(\omega) \prec \boldsymbol{x}\right\} \in \Sigma$ *для* $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{W}_4$.

1. *Rudin W.* Real and Complex Analysis. – McGraw-Hill Book Company. – Singapore, New York, 1987.
2. *Alpay D., Elena Luna-Elizarrarás M., Shapiro M.* Kolmogorov's axioms for probabilities with values in hyperbolic numbers // Adv. Appl. Clifford Algebras. – 2017. – Vol. 27. – P. 913 – 929.
3. *Kumar R., Sharma K.* Hyperbolic valued random variables and conditional expectation // arXiv:1611.06850v2 [math.PR] 27 Mar 2017.
4. *Luna-Elizarrarás M. E., Pogorui A., Shapiro M., Kolomiiets T.* On Quaternionic Measure // Adv. Appl. Clifford Algebras. – 2020. – Vol. 30, No 63.
5. *Pogorui A. A., Rodríguez-Dagnino R. M., Rodríguez-Said R. D.* On the set of zeros of bihyperbolic polynomials // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2008. – Vol. 53, Issue 7. – P. 685 – 690.

ELEMENTS OF PROBABILITY THEORY WITH VALUES IN BIHYPERBOLIC ALGEBRA

In this paper we extend the concept of a probabilistic measure to the case where the measure takes values in the algebra of bihyperbolic numbers.