Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2021»
26–28 травня 2021 р., Львів

УДК 517.5

ПРО АСИМПТОТИЧНУ ПОВЕДІНКУ ОДНОГО КЛАСУ ГОМЕОМОРФІЗМІВ

Богдан Кліщук

Інститут математики НАН України, kban1988@gmail.com

Руслан Салімов

Інститут математики НАН України, ruslan.salimov1@gmail.com

Нехай задано сім'ю Γ кривих γ в просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Борелеву функцію $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ називають *допустимою* для Γ, пишуть $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$, якщо

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)\, ds \ \geqslant \ 1$$

для всіх (локально спрямлюваних) кривих $\gamma \in \Gamma$.

Нехай $p \in (1, \infty)$. Тоді p–*модулем* сім'ї Γ називається величина

$$M_p(\Gamma) \ = \inf_{\rho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x)\, dm(x)\,.$$

Тут m — міра Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Для довільних множин E, F і G в $\mathbb{R}^n$ через $\Delta(E, F, G)$ позначимо сім'ю всіх неперервних кривих $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, які з'єднують E і F в G, тобто $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ і $\gamma(t) \in G$ при $a < t < b$.

Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in D$ і $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. Покладемо

$$\mathbb{A}(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}\,,$$

$$S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : \, |x - x_0| = r_i\}\,, \quad i = 1, \, 2\,.$$

Нехай $Q : D \to [0, \infty]$ — вимірна за Лебегом функція. Будемо говорити, що гомеоморфізм $f : D \to \mathbb{R}^n$ є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля в точці $x_0 \in D$, якщо співвідношення

$$M_p(\Delta(fS_1, fS_2, fD)) \ \leqslant \ \int\limits_{\mathbb{A}} Q(x)\, \eta^p(|x - x_0|)\, dm(x)$$

виконується для будь-якого кільця $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$, $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, и для кожної вимірної функції $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такої, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr = 1\,.$$

Нехай ω_{n-1} — площа одиничної сфери $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ в $\mathbb{R}^n$, $q_{x_0}(r) = \frac{1}{\omega_{n-1}\, r^{n-1}} \int\limits_{S(x_0,r)} Q(x)\, d\mathcal{A}$ — середнє інтегральне значення по сфері $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$, $d\mathcal{A}$ — элемент площі поверхні. Позначимо

$$L(x_0, f, R) = \sup_{|x-x_0| \leqslant R} |f(x) - f(x_0)|\,.$$

Теорема. *Припустимо, що $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — кільцевий Q-гомеоморфізм відносно p-модуля в точці x_0 при $p > n$, де x_0 — деяка точка в $\mathbb{R}^n$ і для деяких чисел $r_0 > 0$, $k > 0$ виконуєтьcя умова*

$$q_{x_0}(t) \leqslant k\, t^{\alpha}$$

для м.в. $t \in [r_0, +\infty)$.

1) Якщо $\alpha \in [0, p - n)$, то

$$\varliminf_{R \to \infty} \frac{L(x_0, f, R)}{R^{\frac{p-n-\alpha}{p-n}}} \geqslant k^{\frac{1}{n-p}} \left(\frac{p-n}{p-n-\alpha}\right)^{\frac{p-1}{p-n}} > 0\,.$$

2) Якщо $\alpha = p - n$, то

$$\varliminf_{R \to \infty} \frac{L(x_0, f, R)}{(\ln R)^{\frac{p-1}{p-n}}} \geqslant k^{\frac{1}{n-p}} \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-n}} > 0\,.$$

Робота виконана за рахунок коштів бюджетної програми "Підтримка розвитку пріоритетних напрямів наукових досліджень" (КПКВК 6541230).

ON THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF ONE CLASS OF HOMEOMORPHISMS

We study the behavior at infinity of ring Q-homeomorphisms with respect to p-modulus for $p > n$.