Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2021»
26–28 травня 2021 р., Львів

УДК 517.9

ЗАДАЧА З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА У СФЕРИЧНІЙ ОБЛАСТІ

Ольга Кіх[1], Антон Кузь[1,2]

[1]НУ "Львівська політехніка", [2]ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, kuz.anton87@gmail.com

У кульвому шарі

$$R_1 < x^2 + y^2 + z^2 < R_2, \quad 0 < R_1 < R_2.$$

необхідно побудувати розв'язок $u(r, \theta, \varphi)$ рівняння Лапласа, заданого у сферичній системі координат

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \tag{1}$$

який по змінній r задовольняє умови

$$\int_{R_1}^{R_2} u(r, \theta, \varphi) dr = f(\theta, \varphi), \quad \int_{R_1}^{R_2} r u(r, \theta, \varphi) dr = g(\theta, \varphi), \tag{2}$$

де f та g — деякі задані достатньо гладкі функції.

Позначимо: $Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)$ — нормовані дійсні сферичні гармоніки [1]

$$\begin{cases} Y_n^{(m)}(\theta, \varphi) = C_{nm} P_n^{(m)}(\cos\theta) \cos m\varphi, \quad m = -n, -n+1, \ldots, 0, \\ Y_n^{(m)}(\theta, \varphi) = C_{nm} P_n^{(m)}(\cos\theta) \sin m\varphi, \quad m = 1, 2, \ldots, n, \end{cases} \tag{3}$$

де $C_{nm} = \left(\frac{2\pi}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\right)^{1/2}$, а функції $P_n^{(m)}(t)$, $t \in [-1, 1]$, — приєднані функції Лежандра першого роду, $P_n^{(m)}(t) = (1-t^2)^{m/2}\frac{d^m}{dt^m}P_n(t)$, де $P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$ — поліноми Лежандра;

$$\Delta_{nm}(R_1, R_2) := \begin{vmatrix} \displaystyle\int_{R_1}^{R_2} r^n dr & \displaystyle\int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^{n+1}} \\ \displaystyle\int_{R_1}^{R_2} r^{n+1} dr & \displaystyle\int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^n} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Розв'язок задачі (1), (2) зображується у вигляді ряду

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \left(c_{nm} r^n + \frac{\gamma_{nm}}{r^{n+1}} \right) Y_n^{(m)}(\theta,\varphi), \tag{5}$$

у якому коефіцієнти c_{nm}, γ_{nm}, $n, m \in \mathbb{Z}_+$ визначаються рівностями

$$c_{nm} = \frac{\Delta_{nm,22}(R_1,R_2)}{\Delta_{nm}(R_1,R_2)} f_{nm} - \frac{\Delta_{nm,12}(R_1,R_2)}{\Delta_{nm}(R_1,R_2)} g_{nm},$$

$$\gamma_{nm} = \frac{\Delta_{nm,11}(R_1,R_2)}{\Delta_{nm}(R_1,R_2)} g_{nm} - \frac{\Delta_{nm,21}(R_1,R_2)}{\Delta_{nm}(R_1,R_2)} f_{nm},$$

де $\Delta_{nm,jq}(R_1,R_2)$ – алгебричне доповнення у визначнику (4) елемента в j-ому рядку та q-ому стовпці; f_{nm}, g_{nm} — коефіцієнти розкладу функцій f та g по сферичних гармоніках (3).

Позначимо $\mathbb{S}^2$ — одинична двовимірна сфера; $L_2(\mathbb{S}^2)$ — простір функцій $v(\theta,\varphi)$ таких, що $\|v; L_2(\mathbb{S}^2)\|^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |v(\theta,\varphi)|^2 \sin\theta d\theta d\varphi < \infty$. $H^k(\mathbb{S}^2)$ — простір функцій $v \in L_2(\mathbb{S}^2)$ таких, що

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} (1+n^2)^k \left(\sum_{m=-n}^{n} |v_{nm}|^2 \right) < \infty$$

з нормою $\|v; H^k(\mathbb{S}^2)\| = \sqrt{N}$. $C^q([R_1,R_2], H^k(\mathbb{S}^2))$ — простір функцій $u(r,\theta,\varphi)$ таких, що $\frac{\partial^j u}{\partial r^j} \in H^k(\mathbb{S}^2)$ для кожного $j = 0, 1, \ldots, q$ із нормою $\|u; C^q([R_1,R_2], H^k(\mathbb{S}^2))\| = \sum_{j=0}^{q} \max_{r\in[R_1,R_2]} \left\| \frac{\partial^j u}{\partial r^j}; H^k(\mathbb{S}^2) \right\|$.

Теорема 1. *Нехай для всіх* $n, m \in \mathbb{Z}_+$ *виконується умова* $\Delta_{nm}(R_1,R_2) \neq 0$ *та* $f, g \in H^{k+q+1}(\mathbb{S}^2)$*, тоді існує єдиний розв'язок* u *задачі* (1), (2)*, який зображується рядом* (5) *та належить простору* $C^q([R_1,R_2], H^k(\mathbb{S}^2))$*, причому*

$$\|u; C^q([R_1,R_2], H^k(\mathbb{S}^2))\| \leqslant C_3(\|f; H^{k+q+1}(\mathbb{S}^2)\| + \|g; H^{k+q+1}(\mathbb{S}^2)\|).$$

1. *Тихонов А. Н., Самарський А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.

PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITION FOR LAPLACE EQUATION IN SPHERICAL DOMAIN

The work is devoted to the construction and investigation of the properties of solutions of an integral problem with respect to the radial variable for the Laplace operator in a spherical layer. The solution of the investigated problem in the form of series of spherical harmonics is constructed. The conditions of correctness of the problem in the spaces of functions given on the two-dimensional sphere are established.