Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2021»
26–28 травня 2021 р., Львів

УДК 531.36, 517.977, 531.391

Асимптотичний розподіл власних частот коливань пружної балки з приєднаною масою

Юлія Калоша, Олександр Зуєв

Інститут прикладної математики і механіки Національної академії наук України, julykucher@gmail.com, zuyev@mpi-magdeburg.mpg.de

Досліджено математичну модель багаточастотних коливань механічної системи, яка складається з шарнірно опертої пружної балки довжини l з розподіленими керуваннями і приєднаної в точці $l_0 \in (0, l)$ маси. Функція $w(x, t)$ описує поперечне переміщення точки балки з координатою $x \in [0, l]$ в момент часу t. Рівняння руху такої системи можна записати у вигляді абстрактного диференціального рівняння відносно вектора $\xi = (u, v, p, q)^T$:

$$\frac{d}{dt}\,\xi(t) = \tilde{\mathcal{A}}\xi(t), \quad \xi(t) \in X,$$

де $X = \overset{\circ}{H}{}^2(0, l) \times L^2(0, l) \times \mathbb{C}^2$ – гільбертів простір зі скалярним добутком $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_X = \int\limits_0^l (E(x)I(x)u_1''(x)\bar{u}_2''(x) + \rho(x)v_1(x)\bar{v}_2(x))\,dx + \varkappa p_1\bar{p}_2 + mq_1\bar{q}_2$.

Лінійний диференціальний оператор $\tilde{\mathcal{A}}$ з областю визначення

$$\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{A}}) = \left\{ \xi \in X : \begin{array}{cc} u \in H^4(0, l_0) \cap H^4(l_0, l), & v \in \overset{\circ}{H}{}^2(0, l), \\ u''(0) = u''(l) = 0, & p = u(l_0), \\ u''|_{x=l_0-0} = u''|_{x=l_0+0}\,, & q = v(l_0) \end{array} \right\} \subset X$$

діє наступним чином:

$$\tilde{\mathcal{A}} : \xi \mapsto \tilde{\mathcal{A}}\xi = \begin{pmatrix} v \\ -\frac{1}{\rho(x)}\left(E(x)I(x)u''(x)\right)'' + \frac{1}{\rho(x)}\sum\limits_{j=1}^{k}\psi_j''(x)M_j \\ q \\ \frac{1}{m}(L - \varkappa p + F) \end{pmatrix},$$

вектор $(F, M_1, ..., M_k)^T$ відповідає керуванню, α_0, α_1, ..., α_k — додатні параметри, $L = E(x)I(x)\left(u'''|_{x=l_0-0} - u'''|_{x=l_0+0}\right)$, функції $\psi_j(x)$ характеризують розташування розподілених керуючих механізмів.

З метою аналізу власних частот і форм коливань розглянутої механічної системи було розглянуто наступну спектральну задачу:

$$\mathcal{A}\xi = \lambda\xi, \quad \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \tag{1}$$

де $\lambda = i\omega$, оператор $\mathcal{A}$ співпадає з $\tilde{\mathcal{A}}$ за умов $F = M_1 = \cdots = M_k = 0$.

Записавши загальний розв'язок диференціального рівняння, яке визначає власні функції задачі (1), і визначивши константи інтегрування за допомогою крайових умов та умов інтерфейсу, записаних у $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, отримано наступне частотне рівняння:

$$\det \mathcal{M} = 0, \tag{2}$$

де

$$\begin{aligned}\det \mathcal{M} =& \frac{m}{4\mu\rho}\left\{(\cosh \mu(l-2l_0) - \cosh \mu l)\sin \mu l + (\cos \mu(l-2l_0) - \cos \mu l)\sinh \mu l\right\} \\ & - \frac{\sin \mu l \sinh \mu l}{\mu^2} + \frac{\varkappa}{4EI\mu^5}\left\{(\cosh \mu l - \cosh \mu(l-2l_0))\sin \mu l \right. \\ & \left. -(\cos \mu(l-2l_0) + \cos \mu l)\sinh \mu l\right\},\end{aligned}$$

$\mu = \left(\frac{\rho}{EI}\omega^2\right)^{1/4}$. Визначник матриці $\mathcal{M}$ у (2) допускає наступне асимптотичне представлення для $\mu \to +\infty$:

$$\det \mathcal{M} = \frac{me^{\mu l}}{8\rho\mu}\big(\Phi_0(\mu) + o(1)\big),$$

де $\Phi_0(\mu) = 2\sin \mu(l-l_0)\sin \mu l_0 - \sin \mu l$. Встановлено, що корені рівняння (2) можна наблизити коренями рівняння $\Phi_0(\mu) = 0$ при достатньо великих μ.

Порівняльний аналіз розподілу коренів рівнянь (2) і $\Phi_0(\mu) = 0$, а також відповідні результати чисельного моделювання наведено у статті [1].

1. *J. Kalosha, A. Zuyev, P. Benner* On the Eigenvalue Distribution for a Beam with Attached Masses. In: *G. Sklyar, A. Zuyev (Eds.)* Stabilization of Distributed Parameter Systems: Design Methods and Applications. Springer Nature. – 2021. – P. 43—56.

ASYMPTOTIC DISTRIBUTION OF EIGENFREQUENCIES FOR A FLEXIBLE BEAM WITH ATTACHED MASS

We study a mathematical model of a hinged flexible beam with distributed controllers and attached rigid body. To analyze free vibrations of this mechanical system, we consider the corresponding spectral problem for a fourth-order differential operator. The characteristic equation is studied analytically, and asymptotic distribution of the eigenvalues is described.