Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2021»
26–28 травня 2021 р., Львів

УДК 517.54

ОЦІНКИ ЗВЕРХУ ДОБУТКІВ ВНУТРІШНІХ РАДІУСІВ ВЗАЄМНО НЕПЕРЕТИННИХ ОБЛАСТЕЙ

Ірина Денега

Інститут математики НАН України, iradenega@gmail.com

Нехай $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел, $\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел, $\mathbb{C}$ — площина комплексних чисел, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — її одноточкова компактифікація, $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$. Нехай B — область з $\overline{\mathbb{C}}$. Нехай

$$g_B(z, a) = h_{B,a}(z) + \log\frac{1}{|z-a|}$$

— узагальнена функція Гріна області B відносно точки $a \in B$. Якщо $a \to \infty$, тоді

$$g_B(z, \infty) = h_{B,\infty}(z) + \log\frac{1}{|z|}.$$

Величина $r(B, a) := \exp(h_{B,a}(z))$ називається внутрішнім радіусом області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ [1–6]. Справедливі подальші твердження.

Теорема 1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Тоді для будь-якої фіксованої системи різних точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n \in \overline{\mathbb{C}}\backslash\{0, \infty\}$ і будь-яких областей, що взаємно не перетинаються, B_0, B_∞, B_k, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, справедлива нерівність*

$$[r\left(B_0, 0\right) r\left(B_\infty, \infty\right)]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} (n+1)^{-\gamma\frac{n+1}{n+2}} \left[\prod\limits_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right)\right]^{1-\frac{2\gamma}{n+2}} \prod\limits_{k=1}^{n} |a_k|^{\frac{2\gamma}{n+2}}, & \text{якщо} \quad \gamma \in \left(0, \frac{n+2}{2}\right]; \\ (n+1)^{-\frac{n+1}{2}} \prod\limits_{k=1}^{n} |a_k|, & \text{якщо} \quad \gamma > \frac{n+2}{2}. \end{cases}$$

Зауваження 1. *В теоремі 1 за умов $\gamma \geqslant \frac{n+2}{2}$ і $\prod\limits_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant 1$ конфігурація областей і точок неістотна.*

Теорема 2. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, n]$. *Тоді для будь-якої фіксованої системи різних точок* $\{a_k\}_{k=1}^{n} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ *і будь-яких областей, що взаємно не перетинаються,* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, *справедлива нерівність*

$$I_n(\gamma) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(I_n(0)\right)^{1-\frac{\gamma}{n}} \left(\prod_{k=1}^{n} |a_k|\right)^{\frac{2\gamma}{n}}, \quad I_n(\gamma) := r^{\gamma}\left(B_0, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right).$$

Зауваження 2. *В теоремі 2 за умов* $\gamma = n$ *і* $\prod\limits_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant 1$ *конфігурація областей і точок неістотна.*

Робота виконана за рахунок коштів бюджетної програми "Підтримка розвитку пріоритетних напрямів наукових досліджень" (КПКВК 6541230).

1. *Denega I. V., Zabolotnii Ya. V.* Estimates of products of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2017. – V. 62, No. 11. – pp. 1611 – 1618.

2. *Denega I.* Estimates of the inner radii of non-overlapping domains // J. Math. Sci. – 2019. – V. 242, No. 6. – pp. 787 – 795.

3. *Denega I., Zabolotnii Ya.* Problem on extremal decomposition of the complex plane // An. St. Univ. Ovidius Constanta. – 2019. – V. 27, No. 1. – pp. 61 – 77.

4. *Bakhtin A. K., Denega I. V.* Inequalities for the inner radii of nonoverlapping domains // Ukr. Math. J. – 2019. – V. 71. – pp. 1138 – 1145.

5. *Bakhtin A. K., Denega I. V.* Extremal decomposition of the complex plane with free poles // J. Math. Sci. – 2020. – V. 246, No. 1. – pp. 1 – 17.

6. *Bakhtin A. K., Denega I. V.* Extremal decomposition of the complex plane with free poles II // J. Math. Sci. – 2020. – V. 246, No. 5. – pp. 602 – 616.

AN UPPER ESTIMATES OF PRODUCTS OF INNER RADII OF NON-OVERLAPPING DOMAINS

We obtain an upper estimates for the products of inner radii of mutually non-overlapping domains with fixed poles corresponding quadratic differentials on any systems of points of the complex plane at all possible values of the degree $\gamma \in (0, n]$ *of the inner radius of the domain relative to the origin (the degree* $\gamma \in \mathbb{R}^{+}$ *of the inner radii of the domains relative to the origin and the infinitely distant point). The corresponding results are obtained for the case when the poles corresponding quadratic differentials are located on* (n, m)*-radial systems of points, on the unit circle and in the case when the domains are mirror-symmetric relative to the unit circle. We establish conditions under which in the proved results the structure of points and domains is irrelevant. Proved estimates of functionals have made it possible to find some exact solutions in open problems on extremal decomposition of the complex plane.*