

УДК 539.3

## ПОРІВНЯННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ТРИВИМІРНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ІЗОТРОПНОГО ПІВПРОСТОРУ

Дмитро Бойко, Юрій Токовий

Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, dmytroboikoukr@gmail.com

У доповіді наведено порівняння у контексті ефективності числової реалізації розв'язків тривимірної задачі теорії пружності для трансверсально ізотропного півпростору, знайдених з використанням різних варіантів методу безпосереднього інтегрування з подальшим зведенням до ключових інтегральних рівнянь другого роду та застосування методу резольвентного ядра, з точними розв'язками, побудованими для різних співвідношень між пружними модулями трансверсально ізотропного матеріалу.

Модель пружного півпростору часто використовують для дослідження локальних ефектів прикладених до поверхні силових навантажень. Тому від побудованих розв'язків відповідних задач теорії пружності для напружень вимагають зокрема згасання за головним вектором та головним моментом з віддаленням від навантаженої ділянки межі. Це вимагає урахування згасальної асимптотики при побудові фундаментальної системи розв'язків ключових рівнянь відповідних задач. Зокрема, при використанні методу безпосереднього інтегрування [1] тривимірну задачу теорії пружності для трансверсально ізотропного півпростору  $\mathcal{D} = \{(x, y, z) : |x| < \infty, |y| < \infty, 0 \leq z\}$  за відсутності масових сил зведено [2, 3] у просторі подвійного інтегрального перетворення Фур'є за планарними координатами до ключового рівняння

$$\frac{d^4 \bar{\sigma}_{zz}}{dz^4} - 2a_1 s^2 \frac{d^2 \bar{\sigma}_{zz}}{dz^2} + a_2 s^4 \bar{\sigma}_{zz} = 0, \quad (1)$$

де  $s^2 = s_x^2 + s_y^2$ ,  $s_x, s_y$  – параметри перетворення,

$$a_1 = \frac{E}{E'} \frac{E' - 2(1 + \nu)\nu' G'}{2(1 - \nu^2)G'}, \quad a_2 = \frac{E}{E'} \frac{E' - E\nu'^2}{E'(1 - \nu^2)E'}, \quad (2)$$

$E, E'$  та  $G = E/(2+2\nu)$ ,  $G'$  – модулі пружності та зсуву у площині ізотропії та у перпендикулярному до неї напрямку;  $\nu$  та  $\nu'$  – коефіцієнти Пуассона,

що описують відповідно звуження (розширення) у перпендикулярному до площини ізотропії напрямку за розтягу (стиску) у паралельному до неї напрямку та звуження (розширення) у площині ізотропії за розтягу (стиску) у перпендикулярному до неї напрямку,  $\bar{\sigma}_{zz}$  – зображення поперечних напружень у просторі інтегрального перетворення.

Форма розв'язку характеристичного рівняння, що відповідає (1), а відтак і вибір способу забезпечення його згасання, залежать від співвідношення між коефіцієнтами (2), тобто, в кінцевому рахунку, від співвідношень між пружними модулями конкретного трансверсально ізотропного матеріалу. У роботі [3] було досліджено можливі форми таких розв'язків, втім для прикладного використання вигідно мати у розпорядженні уніфіковану форму розв'язку, яка не залежить від співвідношень між коефіцієнтами анізотропії.

Побудувати таку форму розв'язку можна зокрема модифікувавши рівняння (1), забезпечивши бажані співвідношення між коефіцієнтами у лівій частині цього рівняння та перенісши усі інші складові у праву частину. У такий спосіб розв'язання рівняння (1) зводиться до інтегрального рівняння другого роду, яке можна розв'язати методом резольвентного ядра. При використанні наближеного виразу для подання резольвентного ядра визначальним показником ефективності є "близькість" диференційного оператора лівої частини модифікованого рівняння до вихідного. Порівняння ефективності різних способів отримання таких рівнянь наведено у цій роботі.

1. Токовий Ю., Бойко Д. Розв'язок тривимірної задачі термопружності для необмеженого трансверсально ізотропного тіла // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – 61, № 4. – С. 88–99.
2. Токовий Ю., Бойко Д. Інтегральні рівняння тривимірної задачі теорії пружності для однорідного трансверсально ізотропного півпростору // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2020. – 18. – С. 83–92.
3. Tokovyy Y., Boyko D., Gao C. Three-dimensional thermal-stress analysis of semi-infinite transversely isotropic composites// Trans Nanjing Univ. Aeronautics Astronautics. – 2021. – 38, No. 1. – P. 18–28.

## **COMPARISON OF SOLUTIONS TO THREE-DIMENSIONAL ELASTICITY PROBLEMS FOR A TRANSVERSELY ISOTROPIC HALF-SPACE**

*A comparison is presented for solutions of the three-dimensional problem of elasticity theory for a transversely isotropic half-space obtained by using different variants the direct integration method with subsequent reduction to the governing integral equations of the second kind for different ratios between elastic material modules.*