**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2021»,
26–28 травня 2021 р., Львів**

УДК 514.9

# АВТОНОМНІ НЕЛІНІЙНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛЯПУНОВА У ПРОСТОРІ ГІЛЬБЕРТА

**Бігун Дмитро[1], Панасенко Євген[2], Покутний Олександр[1]**

[1]Інститут математики НАН України, Dmytrobigun94@gmail.com
lenasas@gmail.com
[2]Запорізький національний університет, panasenko.yevgeniy@gmail.com

Дослідженню рівняння Ляпунова та застосуванню його методів у скінченновимірому та нескінченновимірному випадках присвячено багато робіт. Слід зауважити, що як правило досліджуються коректні нерезонансні задачі, коли існує єдиний розв’язок який неперервно залежить від правих частин рівняння. У даній роботі досліджується нерегулярна (резонансна) крайова задача для нелінійно збуреного рівняння Ляпунова у просторі Гільберта на відрізку, правий кінець якого залежить від параметра $\varepsilon$. У загальному випадку така задача може бути узагальненою нормально-розв’язною з оператором в лінійній частині, який у загальному випадку може мати незамкнену множину значень [1]. Така задача може бути дослідженою за допомогою обереженого оператора [2].

**1. Постановка задачі.** Розглянемо автономну крайову задачу

$$\dot{Z}(t,\varepsilon) = AZ(t,\varepsilon) - Z(t,\varepsilon)B + \varepsilon R(Z(t,\varepsilon),\varepsilon) + \Phi, \quad (1)$$

$$lZ(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(Z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \quad (2)$$

де $Z = Z(t,\varepsilon)$ невідома оператор-функція з простору $C^1\big([a;b(\varepsilon)];\mathcal{L}(H_1)\big) \times C(0;\varepsilon_0]$ для фіксованого
$\varepsilon_0 > 0$; $A, B, \Phi, \alpha$ – постійні зліченновимірні матриці; $R(Z(t,\varepsilon),\varepsilon)$ – нелінійна за змінною $Z$ оператор-функція, неперервно-диференційована по $Z(t,\varepsilon)$ в околі породжуючого розв’язку і неперервна по $\varepsilon$ в околі нуля: $R(Z(\cdot,\varepsilon)) \in C^1[||Z - Z_0|| \le q]$; $R(Z,\cdot) \in C(0;\varepsilon_0]$; $q$ та $\varepsilon$ – достатньо малі константи; $l$ – лінійний неперервний оператор $l: C^1\big([a;b(\varepsilon)];\mathcal{L}(H_1)\big) \to H_2$ і $J(Z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ – нелінійний обмежений оператор неперервно-диференційований по $Z$ у розумінні Фреше.

**2. Основні результати.**

**2.1. Лінійна задача.** При $\varepsilon = 0$ отримаємо породжуючу автономну крайову задачу

$$\dot{Z}_0(t) = AZ_0(t) - Z_0(t)B + \Phi, \quad (3)$$

$$lZ_0(\cdot) = \alpha, \quad (4)$$

де $Z_0(t) \in C^1\big([a;b^*];\mathcal{L}(H_1)\big)$, $b^* = b(0)$.

**Теорема 1.** *Нехай оператор L є узагальнено-оборотним. Тоді крайова задача (3), (4) має розв'зки тоді й тільки тоді, коли виконується наступна умова*

$$\mathcal{P}_{N(L^*)}\left[\alpha - l\int_0^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau\right] = 0. \qquad (5)$$

За виконання даної умови розв'язки крайової задачі (3), (4) мають такий вигляд:

$$Z_0(t,C) = K_0^t\left[\mathcal{P}_{N(L)}C\right] + (G[\Phi,\alpha])(t),$$

де узагальнений оператор Гріна визначається таким чином

$$(G[\Phi,\alpha])(t) = \int_0^t K_\tau^t[\Phi]d\tau - K_0^t[L^- l\int_0^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau] + K_0^t[L^-\alpha].$$

**Теорема 2.** *Нехай оператор L має узагальнений L-допустимий підпростір X. Тоді:*

*1 a) Крайова задача (3) (4) має сильні узагальнені розв'язки тоді й тільки тоді, коли виконується умова*

$$\mathcal{P}_{N(L^*)}\left[\alpha - l\int_0^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau\right] = 0;$$

*якщо* $\alpha - l\int_0^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau \in R(L)$, *то розв'язки будуть звичайними класичними;*

*1 b) За виконання даної умови розв'язності:*

$$LM = \alpha - l\int_0^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau$$

*множина сильних узагальнених розв'язків має вигляд*

$$Z_0(t,C) = K_0^t\left[\mathcal{P}_{N(L)}C\right] + (G[\Phi,\alpha])(t),$$

*де узагальнений оператор Гріна визначається таким чином*

$$(G[\Phi,\alpha])(t) = \int_0^t K_\tau^t[\Phi]d\tau - K_0^t[L_X^- l\int_0^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau] + K_0^t[L_X^-\alpha];$$

*2 a) Крайова задача (3) (4) має сильні узагальнені квазірозв'язки тоді й тільки тоді, коли виконується умова*

$$\mathcal{P}_{N(L^*)}\left[\alpha - l\int_0^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau\right] \neq 0;$$

*2 b) За виконання даної умови розв'язності:*

$$\mathcal{P}_{N(L^*)}\left[\alpha - l\int_0^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau\right] \neq 0;$$

*множина сильних узагальнених розв'язків має вигляд*

$$Z_0(t,C) = K_0^t\left[\mathcal{P}_{N(L)}C\right] + (G[\Phi,\alpha])(t),$$

*де узагальнений оператор Гріна визначається таким чином*

$$(G[\Phi,\alpha])(t) = \int_0^t K_\tau^t[\Phi]d\tau - K_0^t[L_X^- l \int_0^{\cdot} K_\tau^{\cdot}[\Phi]d\tau] + K_0^t[L_X^-\alpha].$$

**2.2 Нелінійна задача.**

**Теорема 3.** *Нехай автономна крайова задача*

$$\dot{Z}(\tau,\varepsilon) = AZ(\tau,\varepsilon)B - Z(\tau,\varepsilon)B + \Phi +$$
$$+\varepsilon\Big(\beta(\varepsilon)(AZ(\tau,\varepsilon)B - Z(\tau,\varepsilon)B + \Phi) + \big(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)\big)R(Z(\tau,\varepsilon),\varepsilon)\Big), \qquad (6)$$

$$lZ(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon J(Z(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \qquad (7)$$

*має розв'язок* $Z(\tau,\varepsilon) \in C^1\big([a;b^*];\ \mathcal{L}(H_1)\big) \times C(0;\varepsilon_0]$, *який при* $\varepsilon = 0$ *обертається у породжуючий розв'язок* $Z_0(\tau,0) = Z_0(\tau,C^0)$ *задачі (3), (4). Тоді оператор* $C^0 \in \mathcal{L}(H_1)$ *задовольняє операторне рівняння*

$$\mathcal{P}_{N(L^*)}\left[J(Z_0(\cdot,C^0),0) - l\int_0^{b^*} F_0(\tau,C^0)d\tau\right] = 0.$$


1. *Бойчук А. А., Покутний А. А.* Теория возмущений операторных уравнений в пространствах Фреше и Гильберта. Український математичний журнал. 2015. Т. 67, № 9. С. 1181–1181.
2. *Панасенко Є. В., Покутний О. О.* Нелінійні крайові задачі для рівняння Ляпунова у просторі $L_p$. Нелінійні коливання. 2018. Т. 21, №4. С. 523–536.


## AUTONOMOUS NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR LYAPUNOV EQUATION IN THE HILBER SPACE

*The paper is devoted to investigation of boundary value problems for the Lyapunov equation in the Hilbert space. We consider case when interval of the corresponding problem depends on the parameter. Necessary and sufficient conditions of the existence of generalized solutions of the corresponding problem are obtained.*