Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2021»
26–28 травня 2021 р., Львів

УДК 517.927

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ НЕТЕРОВИХ НЕОДНОРІДНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ У ПРОСТОРАХ СОБОЛЄВА

Олена Атласюк, Володимир Михайлець

Інститут математики НАН України,
hatlasiuk@gmail.com, mikhailets@imath.kiev.ua

Нехай задано скінченний інтервал $(a,b) \subset \mathbb{R}$ і параметри $\{m,n,r,l\} \subset \mathbb{N}, 1 \leq p \leq \infty$.

Позначимо через $W_p^n = W_p^n\big([a,b];\mathbb{C}\big) := \big\{y \in C^{n-1}[a,b] \colon y^{(n-1)} \in AC[a,b], y^{(n)} \in L_p[a,b]\big\}$ комплексний простір Соболєва.

Розглянемо на скінченному інтервалі (a,b) лінійну крайову задачу для системи m диференціальних рівнянь порядку r

$$(Ly)(t) := y^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t) y^{(r-j)}(t) = f(t), \quad t \in (a,b), \tag{1}$$

$$By = c, \tag{2}$$

де матриці-функції $A_{r-j}(\cdot) \in (W_p^n)^{m \times m}$, вектор-функція $f(\cdot) \in (W_p^n)^m$, вектор $c \in \mathbb{C}^l$, $B \colon (W_p^{n+r})^m \to \mathbb{C}^l$ є лінійним неперервним оператором, а шуканою є вектор-функція $y(\cdot) \in (W_p^{n+r})^m$.

Крайова умова (2) є найбільш загальною для цього рівняння. Вона може містити похідні цілого або дробового порядку k, де $0 < k \leq n + r$.

Пов'яжемо із задачею (1), (2) лінійний оператор у парі банахових просторів

$$(L,B) \colon (W_p^{n+r})^m \to (W_p^n)^m \times \mathbb{C}^l. \tag{3}$$

Теорема 1. *Лінійний оператор* (3) *є обмеженим і фредгольмовим з індексом* $mr - l$.

Теорема 1 допускає уточнення. Для кожного номера $k \in \{1,\ldots,r\}$ розглянемо сім'ю матричних задач Коші

$$Y_k^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t) Y_k^{(r-j)}(t) = O_m, \quad t \in (a,b),$$

з початковими умовами

$$Y_k^{(j-1)}(a) = \delta_{k,j} I_m, \quad j \in \{1,\ldots,r\}.$$

Тут $Y_k(\cdot) \in (W_p^{n+r})^{m\times m}$ є шуканою матрицею-функцією, а $\delta_{k,j}$ — символом Кронекера.

Позначимо через $[BY_k]$ числову матрицю розмірності $(m\times l)$, у якої j-й стовпчик є результатом дії оператора B на j-й стовпчик матриці-функції $Y_k(\cdot)$.

Означення 1. Блочна прямокутна числова матриця

$$M(L,B) := ([BY_0],\ldots,[BY_{r-1}]) \in \mathbb{C}^{mr\times l}, \tag{4}$$

що складається з r прямокутних блоків-стовпців $[BY_k] \in \mathbb{C}^{m\times l}$, є характеристичною матрицею крайової задачі (1), (2).

Теорема 2. *Вимірності ядра і коядра оператора* (3) *дорівнюють відповідно вимірностям ядра і коядра характеристичної матриці* (4)*:*

$$\dim\ker(L,B) = \dim\ker\big(M(L,B)\big),$$
$$\dim\operatorname{coker}(L,B) = \dim\operatorname{coker}\big(M(L,B)\big).$$

Наслідок 1 ([1]). *Оператор* (3) *є оборотним тоді і тільки тоді, коли $l = mr$ і матриця $M(L,B)$ є невиродженою.*

У випадку $l = mr$, $p < \infty$, наслідок 2 доведено у роботі [2].

1. *Атласюк О. М., Михайлець В. А.* Про розв'язність неоднорідних крайових задач у просторах Соболєва // Доп. НАН України. – 2019. – № 11. – С. 3 – 7.

2. *Gnyp E. V., Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A.* Fredholm boundary-value problems with parameter in Sobolev spaces // Ukrainian Mathematical Journal. – 2015. – **67**, – № 5. – P. 658 – 667.

ON SOLVABILITY OF FREDHOLM INHOMOGENEOUS BOUNDARY-VALUE PROBLEMS IN SOBOLEV SPACES

We investigate the most general class of Fredholm one-dimensional inhomogeneous boundary-value problems in the Sobolev spaces. Boundary conditions of these problems may contain derivatives the order of higher than order of the system of differential equations. It is established that each of these boundary-value problems correspond to a certain rectangular numerical characteristic matrix with kernel and cokernel having the same dimension as the kernel and cokernel of the boundary-value problem. The assumption under which the sequence of characteristic matrices to converge are found.