Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2021»
26–28 травня 2021 р., Львів

UDC 519.213

ON THE CORRELATION FUNCTIONS OF THE CHARACTERISTIC POLYNOMIALS OF REAL RANDOM MATRICES WITH INDEPENDENT ENTRIES

Ievgenii Afanasiev

B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, Ukraine,
afanasiev@ilt.kharkov.ua

The talk is concerned with real random matrices $M_n = (x_{jk})$ which entries are independent identically distributed real random variables with zero mean and unit variance. We consider the correlation functions of the characteristic polynomials (correlation functions for short) of these matrices

$$\mathsf{f}_m(z_1, \dots, z_m) = \mathbf{E}\left\{ \prod_{j=1}^{m} \det\left(M_n - z_j\right)\left(M_n - z_j\right)^* \right\},$$

where $\mathbf{E}$ is an expectation. Despite these functions are not local, they can shed light on the asymptotic behavior of eigenvalues in the local regime. Moreover, the correlation functions are of independent interest.

The asymptotic behavior of the correlation functions is established in the form of a certain integral over unitary self-dual matrices with respect to the invariant measure. The integral is computed in the case of the second order correlation function, i.e. for $m = 2$. The main result is

Теорема 1. *Let the first four moments of the common distribution of entries of M_n be finite and $z_j = z_0 + \frac{\zeta_j}{\sqrt{n}}$, $\zeta_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2$, $z_0 \in (-1, 1)$. Then the correlation function of the characteristic polynomials f_2 satisfies the asymptotic relation*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-2} \frac{\mathsf{f}_2(z_1, z_2)}{\mathsf{f}_1(z_1)\mathsf{f}_1(z_2)} = C e^{\left(1-|z_0|^2\right)^2 \kappa_4} \frac{\mathrm{Pf}(K(\zeta_j, \zeta_k))_{j,k=1}^2}{\triangle(\zeta_1, \zeta_2, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2)},$$

where C is some constant, which does not depend on the common distribution of entries and on ζ_1, ζ_2; $\kappa_4 = \mathbf{E}\{x_{11}^4\} - 3$, Pf is a Pfaffian, $\triangle(\zeta_1, \zeta_2, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2)$ is a Vandermonde determinant of ζ_1, ζ_2, $\overline{\zeta}_1$, $\overline{\zeta}_2$ and

$$K(\zeta_j, \zeta_k) = e^{-\frac{|\zeta_j|^2}{2} - \frac{|\zeta_k|^2}{2}} \begin{pmatrix} (\zeta_j - \zeta_k) e^{\zeta_j \zeta_k} & (\zeta_j - \overline{\zeta}_k) e^{\zeta_j \overline{\zeta}_k} \\ (\overline{\zeta}_j - \zeta_k) e^{\overline{\zeta}_j \zeta_k} & (\overline{\zeta}_j - \overline{\zeta}_k) e^{\overline{\zeta}_j \overline{\zeta}_k} \end{pmatrix}.$$

From the obtained asymptotics it is clear that the correlation functions behave like that for the Real Ginibre Ensemble up to a factor depending only on the fourth absolute moment of the common probability law of the matrix entries.

ПРО КОРЕЛЯЦІЙНІ ФУНКЦІЇ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ ПОЛІНОМІВ ДІЙСНИХ ВИПАДКОВИХ МАТРИЦЬ З НЕЗАЛЕЖНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

У доповіді буде розглянуто кореляційні функції характеристичних поліномів дійсних випадкових матриць з незалежними елементами та встановлено асимптотичну поведінку цих корреляційних функцій у формі деякого інтеграла за інваріантною мірою по множині унітарних самодуальних матриць. Цей інтеграл обчислено для кореляційної функції другого порядку. З отриманої асимптотики випливає, що кореляційні функції ведуть себе таким же чином, як і у випадку дійсного ансамблю Жинібра з точністю до множника, що залежить лише від четвертого момента спільного розподілу ймовірностей матричних елементів.