**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2020»**
**26–28 травня 2020 р., Львів**

УДК 517.956.4

# ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ІЗ ЗАГОСТРЕННЯМ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

**Євгенія Євгеньєва**

Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
yevgeniia.yevgenieva@gmail.com

Розглядається початково-крайова задача:

$$(|u|^{q-1}u)_t - \Delta_p\, u = 0, \quad (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \quad p \geqslant q > 0, \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0 \;\text{ в } \Omega, \;\; u_0 \in L^{q+1}(\Omega), \tag{2}$$

$$u(t,x)\Big|_{\partial\Omega} = f(t,x) \to \infty \quad \text{при } t \to T, \tag{3}$$

де $\Delta_p\, u = \sum_{i=1}^{n} \left(|\nabla_x u|^{p-1} u_{x_i}\right)_{x_i}$, $T > 0$, будемо називати часом загострення, $\Omega$ — обмежена зв'язна область в $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ з $C^2$–гладкою межею $\partial\Omega$. Основною особливістю задачі (1)–(3) є загострення (blow-up) граничної функції ($f(t,x) \to \infty$ при $t \to T$). Характер цього загострення при $t \to T$ опишемо функцією:

$$\begin{aligned} F(t) := \sup_{0<\tau<t} \int_\Omega |f(\tau,x)|^{q+1} dx + \int_0^t \int_\Omega |\nabla_x f(\tau,x)|^{p+1} dx d\tau + \\ + \left( \int_0^t \left( \int_\Omega |f(\tau,x)|^{q+1} dx \right)^{\frac{1}{q+1}} d\tau \right)^{q+1}. \end{aligned} \tag{4}$$

У роботах [1] та [2] за допомогою методу енергетичних оцінок було здобуто результати при степеневому загостренні для задачі (1)–(3) за умов $p = q$ та $p > q$ окремо. Однак при глибшому дослідженні виявилося, що ці результати можна представити у вигляді одного твердження, тим самим узагальнити метод енергетичних оцінок, розглядаючи загальний випадок $p \geqslant q$. Цей висновок є вагомим, оскільки рівняння (1) з умовами $p = q$ та $p > q$ є принципово різними та зазвичай потребують різних підходів до їх вивчення. Тож у роботі [3] було узагальнено результати та представлено у теоремі.

**Теорема 1.** *Нехай $u$ — довільний слабкий розв'язок задачі* (1)–(3). *Нехай також гранична функція $f$ задана таким чином, що характер її загострення $F$, визначений у* (4), *має вигляд:*

$$F(t) = \omega_0 (T-t)^{-\alpha} \quad \forall t < T, \quad \omega_0 > 0,\ \frac{1}{p} < \alpha < \bar{\alpha},$$
$$\bar{\alpha} := \frac{q+1}{p-q},\ \text{якщо } p > q, \quad \bar{\alpha} := \infty,\ \text{якщо } p = q. \quad (5)$$

*Тоді існує стала $G > 0$ і значення $\hat{s} > 0$, що залежить лише від відомих параметрів задачі, такі, що для розв'язку $u$ справедлива рівномірна за $t \leqslant T$ енергетична оцінка:*

$$\int_0^t \int_{\Omega(s)} |\nabla_x u(\tau,x)|^{p+1} dx d\tau + \sup_{0 \leqslant \tau < t} \int_{\Omega(s)} |u(\tau,x)|^{q+1} dx \leqslant$$
$$\leqslant G \omega_0^{\frac{q+1}{q+1-\alpha(p-q)}} s^{-\nu} \qquad \forall t \leqslant T, \forall s \in (0,\hat{s}), \quad (6)$$

*де* $\nu = \frac{n(p-q)}{q+1-\alpha(p-q)} + \frac{q+1}{q+1-\alpha(p-q)} \alpha(p+1)$, $\Omega(s) := \{x \in \Omega : d(x) > s\},\ s > 0.$

Оцінка (6) дозволяє прослідкувати перехід від випадку $p > q$ до $p = q$. Легко бачити, що розв'язки рівняння при $p > q$ швидше загострюються біля границі, більш того, вони "вибухають" та формують зону сингулярності при $\alpha = \frac{q+1}{p-q}$. При цьому, чим більше різниця між параметрами $p$ та $q$, тим швидше "вибухає" розв'язок.

1. *Yevgenieva Ye.A.* Limiting profile of solutions of quasilinear parabolic equations with flat peaking // Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – Vol. 234, № 1. – P. 106–116.

2. *Shishkov A.E., Yevgenieva Ye.A.* Localized blow-up regimes for quasilinear doubly degenerate parabolic equations // Mathematical Notes. – 2019. – Vol. 106, № 4. – P. 639-650.

3. *Євгеньєва Є.О.* Поведінка розв'язків із загостренням для квазілінійних параболічних рівнянь // Укр. мат. вісник. – 2020. (to appear)

## BEHAVIOR OF BLOW-UP SOLUTIONS FOR QUASILINEAR PARABOLIC EQUATIONS

*It is studied the behavior of blow-up solutions of quasilinear parabolic equation in multidimensional domain. The method of energy estimates is improved.*