Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2020»
26–28 травня 2020 р., Львів

УДК 517.5

ВІДНОВЛЕННЯ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ ЗА ЇХНІМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ФУР'Є, ЩО ЗАДАНІ З ПОХИБКОЮ

Олександр Пожарський, Катерина Пожарська

Інститут математики НАН України, PozharskyiO@gmail.com, kate.shvai@gmail.com

Нехай $L_p := L_p([0,1])$, $1 \le p < \infty$, і $C := C([0,1])$ — простори дійснозначних сумовних в степені p і, відповідно, неперервних на відрізку $[0,1]$ функцій $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$; l_p, $1 \le p < \infty$, — простір послідовностей $\xi = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ дійсних чисел. Норми у просторах задано у стандартний спосіб.

Для функції $y \in C$ розглянемо її ряд Фур'є $\sum_{k=1}^{\infty} y_k \varphi_k(t)$, де y_k — коефіцієнти Фур'є функції y за деякою ортонормованою у просторі L_2 системою $\Phi := \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ неперервних функцій. Додатково припускаємо, що $\|\varphi_k\|_C \le C_1 k^{\beta}$, $k = 1, 2, \ldots$, де $C_1, \beta \ge 0$ — деякі сталі.

Далі, нехай для $y \in C$ відомі лише наближені значення y_k^{δ} її коефіцієнтів Фур'є y_k, причому $y_k^{\delta} = y_k + \delta \xi_k$, $k = 1, 2, \ldots$, де $\delta \in (0,1)$, а $\xi = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ — деякий шум, такий що $\|\xi\|_{l_p} \le 1$.

Задача полягає у відновленні функцій y, які належать до класу

$$W_p^{\psi} = \Big\{ y \in L_2\colon \quad \|y\|_{W_p^{\psi}}^p = \sum_{k=1}^{\infty} \psi^p(k) |y_k|^p \le 1 \Big\}, \quad 1 \le p < \infty,$$

де $\{\psi(k), k \in \mathbb{N}\}$ — довільна монотонно зростаюча послідовність, порядок росту якої знаходиться в межах від $k^{\beta+1/2}$ до k^{θ}, $\beta + 1/2 < \theta$, за допомогою так званого λ-методу підсумовування рядів, що має вигляд

$$T_n^{\lambda}(y^{\delta})(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n y_k^{\delta} \varphi_k(t), \ t \in [0,1] \tag{1}$$

де $\lambda = \{\lambda_k^n\}_{k=1}^{n}$, $n = n(\delta) \in \mathbb{N}$ — деяка трикутна числова матриця, елементи якої задовольняють умову $|1 - \lambda_k^n| \le C_2 (k/n)^{\theta}$, $1 \le k \le n$, $n \in \mathbb{N}$, а $C_2, \theta > 0$ — деякі сталі.

Похибку $\Delta(W_p^{\psi}, l_p)$ відновлення функцій з класу $W_p^{\psi} \subset C$ за допомогою методу $T_n^{\lambda}(y^{\delta})$ визначаємо за формулою

$$\Delta(W_p^{\psi}, l_p) = \sup_{\|y\|_{W_p^{\psi}} \le 1} \ \sup_{\|\xi\|_{l_p} \le 1} \left\| y - T_n^{\lambda}(y^{\delta}) \right\|_C .$$

Досить повна інформація щодо загальної постановки задачі оптимального відновлення у нормованих просторах, а також відповідні результати по розв'занню такої задачі на класах гладких і аналітичних функцій, визначених на різних компактних многовидах, викладені у статті [1].

Нижче, у формулюванні результату, запис $A \asymp B$ для додатних числової послідовності $A = (A_n)_{n=1}^{\infty}$ та функції $B = B(\delta)$, $\delta \in (0,1)$, що залежать, можливо, від деякої сукупності параметрів, означає, що при всіх допустимих значеннях цих параметрів, за умови певного відношення між $n \in \mathbb{N}$ і $\delta \in (0,1)$ має місце співвідношення $c_1 B \le A \le c_2 B$ з деякими додатними сталими c_1 та c_2, що не залежать від n і δ. Якщо справедлива відповідна одностороння нерівність, то пишемо $A \ll B$.

Через Ψ_{γ_1,γ_2}, $0 < \gamma_1 < \gamma_2$, позначимо множину функцій $\psi\colon R_+ \to R_+$, що задовольняють умови: 1) послідовність $\{\psi(k),\ k \in \mathbb{N}\}$ додатна і строго зростає при $k \to \infty$; 2) $\forall \nu,\ \gamma_1 < \nu \le \gamma_2$ існують такі додатні сталі c_3, c_4, можливо залежні від ν, що для функції $\varphi(\tau) := \psi(\tau)\tau^{-\nu},\ \tau > 0$ справджуються нерівності $c_3\varphi(\tau_2) \le \varphi(\tau_1) \le c_4\varphi(\tau_2)$, $\ 0 < \tau_1 < \tau_2$.

Теорема 1. *Нехай* $1 \le p \le 2$, $\ \psi \in \Psi_{\beta+1/2,\theta}$, *або* $2 < p < \infty$, $\psi \in \Psi_{\beta+1,\theta}$ *і* $T_n^{\lambda}(y^{\delta})$ *— метод наближення, що визначаєтьcя формулою (1). Тоді при* $n \asymp \psi^{-1}\left([1/\delta]\right)$ *справджується оцінка*

$$\Delta(W_p^{\psi}, l_p) \ll \delta\left(\psi^{-1}\left([1/\delta]\right)\right)^{\beta+1-1/p}, \tag{2}$$

де y^{-1} *— обернена до* y *функція,* $[a]$ *— ціла частина числа* a.

Зауважимо, що в результаті проведених досліджень, нами поширено результати робіт [2], [3] на більш широкий спектр класів функцій, і при загальніших обмеженнях на рівень шуму.

1. *Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Мат. сборник.– 2002.– 193, № 3, – С. 79–100.

2. *Sharipov K.* On the recovery of continuous functions from noisy Fourier coefficients // Comput. Methods in Appl. Math.– 2011.– 11, № 1.– P. 75–82.

3. *Mathe P., Pereverzev S.V.* Stable summation of orthogonal series with noisy coefficients // J. Approx. Theory.– 2002.– 118, – P. 66–80.

RECOVERY OF CONTINUOUS FUNCTIONS FROM NOISY FOURIER COEFFICIENTS

We study the recovery of continuous functions of one variable from the classes of functions that are given in terms of generalized smoothness from their Fourier coefficients with respect to certain orthogonal system, blurred by noise.

Робота виконана за часткової підтримки гранту H2020-MSCA-RISE-2014, номер проекту 645672 (AMMODIT: Approximation Methods for Molecular Modelling and Diagnosis Tools) та бюджетної програми "Підтримка розвитку пріоритетних напрямів наукових досліджень" (КПКВК 6541230).