Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2020»,
26–28 травня 2020 р., Львів

УДК 512.64

(z,k)-ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ МАТРИЦЬ НАД КІЛЬЦЕМ ЦІЛИХ ГАУСОВИХ ЧИСЕЛ

Наталія Ладзоришин

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України, natalja.ladzoryshyn@gmail.com

Нехай $\mathbb{K}=\mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$ – квадратичне евклідове кільце , $\mathcal{E}(a)$ – евклідова норма елемента $a\in\mathbb{K}$ [1].

В [2] введено поняття (z,k)-еквівалентності матриць над квадратичними кільцями.

Означення. *Матриці* A *і* B *розміру* $m\times n$ *над квадратичним кільцем* $\mathbb{K}$ *називатимемо (z,k)-еквівалентними, якщо існують такі оборотні матриці* $S\in GL(m,\mathbb{Z})$ *над кільцем цілих чисел і* $Q\in GL(n,\mathbb{K})$ *над квадратичним кільцем* $\mathbb{K}$*, що* $A=SBQ$.

У [1, 2] встановлено, що кожна неособлива матриця $A\in M(n,\mathbb{K})$ над квадратичним евклідовим кільцем з канонічною діагональною формою $D^A=diag(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ є (z,k)-еквівалентною до трикутної матриці T^A, тобто існують матриці $S\in GL(n,\mathbb{Z})$ і $Q\in GL(n,\mathbb{K})$ такі, що

$$T^A=SAQ=\begin{Vmatrix}\mu_1 & 0 & \cdots & 0\\ t_{21}\mu_1 & \mu_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ t_{n1}\mu_1 & t_{n2}\mu 2 & \cdots & \mu_n\end{Vmatrix}, \qquad (1)$$

де

1) $t_{ij}=0,$ якщо $\mu_i=1$, $i,j=1,\ldots,n,\;\; j<i,$

2) $\mathcal{E}(t_{ij})=\dfrac{\mathcal{E}(\mu_i)}{\mathcal{E}(\mu_j)}$, якщо $t_{ij}\neq 0$, $i,j=1,\ldots,n,\;\; j<i.$

Цю трикутну форму T^A вигляду (1) названо стандартною формою матриці A відносно (z,k) еквівалентності.

Стандартна форма матриці в загальному визначена неоднозначно. Ми встановили клас матриць над кільцем цілих гаусових чисел, для яких стандартною формою є їх канонічна діагональна форма, а отже визначена однозначно.

Теорема. *Нехай* $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[i]$ *– кільце цілих гаусових чисел. Матриця* $A \in M(n, \mathbb{Z}[i])$ *з евклідовою нормою її визначника* $\det A$ *меншою, ніж чотири, тобто* $\mathcal{E}(\det A) < 4$, (z,k)*-еквівалентна до стандартної форми* T^A*, яка дорівнює канонічній діагональній формі* D^A *матриці* A*, тобто* $T^A = D^A$*. Така стандартна форма матриці* A *є єдиною.*

Наслідок. *Нехай* $A, B \in M(n, \mathbb{Z}[i])$. *Матриці* A *і* B *для яких* $\mathcal{E}(\det A) < 4$, $\mathcal{E}(\det B) < 4$ (z,k)*-еквівалентні тоді і тільки тоді, якщо вони еквівалентні, тобто* $D^A = D^B$.

1. *Родосский К. А.* Алгоритм Евклида. – М.: Наука, 1988. – 240с.
2. *Ладзоришин Н. Б., Петричкович В. М.* Стандартна форма матриць над квадратичними кільцями відносно (z,k)–еквівалентності та структура розв’язків матричних двобічних лінійних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – **61**, № 2. – С. 49–56.
3. *Зеліско В. Р., Ладзоришин Н. Б., Петричкович В. М.* Про еквівалентність матриць над квадратичними евклідовими кільцями // Прикладні проблеми мех. і матем. – 2006. – Вип. 4. – С. 16–21.

(z,k)-EQUIVALENCE OF MATRICES OVER THE RING OF GAUSSIAN INTEGERS

It is proved that for the matrix A *over the ring of Gaussian integers* $\mathbb{Z}[i]$ *with the Euclidean norm of its determinant* $\det A$ *being less than four, the standard form* T^A *is the canonically diagonal form* D^A *of matrix* A.