Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2020»
26–28 травня 2020 р., Львів

УДК 517.95

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ НЕЛОКАЛЬНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО РІВНЯННЯ ЗІ СЛАБКОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

Володимир Ільків, Наталія Страп, Ірина Волянська

Національний університет "Львівська політехніка",
ilkivv@i.ua, n.strap@i.ua, i.volyanska@i.ua

Розглянуто задачу з нелокальними умовами для диференціально-операторного рівняння зі сталими коефіцієнтами та нелінійною (слабко нелінійною) правою частиною

$$L(d_t, \hat{A})u = \sum_{|\hat{s}|\leq n} a_{\hat{s}} \hat{A}_1^{s_1} \dots \hat{A}_p^{s_p} d_t^{s_0} u(t) = \varepsilon f(u), \tag{1}$$

$$\mu d_t^{s_0} u\big|_{t=0} - d_t^{s_0} u\big|_{t=T} = 0, \qquad s_0 = 0, 1, \dots, n-1, \tag{2}$$

де $\hat{s} = (s_0, s)$, $s = (s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|\hat{s}| = s_0 + s_1 + \dots + s_p$, $d_t = d/dt$, коефіцієнти $a_{\hat{s}}$ та параметри ε і μ є комплексними числами ($a_{(n,0)} = 1$, $\mu \neq 0$); $A_i \colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$, $i = 1, \dots, p, -\hat{A}_i \colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ — лінійні оператори, що мають спільне спектральне зображення, тобто існує повна ортонормована система елементів $x_k \in \mathbf{X}$, а саме виконуються рівності

$$\hat{A}_i x_k = \alpha_{ik} x_k, \quad i = 1, \dots, p, \quad k \in \mathbb{N},$$

для деяких комплексних чисел α_{ik}; $\mathbf{X}$ — сепарабельний гільбертів простір.

Введено та зафіксовано множину

$$\mathcal{N} = \{\nu_k \in \mathbb{R} : k \in \mathbb{N}\},$$

яку будемо називати спектром функцій, якщо вона підпорядкована таким умовам:

1) рівність $\nu_k = \nu_r$ справджується лише при $k = r$, тобто відображення $k \leftrightarrow \nu_k$ є бієктивним відображенням $\mathbb{N}$ на множину $\mathcal{N}$;

2) $\nu_k^2 \to \infty$ при $k \to \infty$.

Встановлено умови розв'язності задачі (1), (2) у шкалі $\{\mathbf{X}\mathcal{N}_{d,r}(\Omega)\}_{d,r\in\mathbb{R}}$, де $\mathbf{X}\mathcal{N}_{d,r}(\Omega)$, $d,r\in\mathbb{R}$, $\Omega\subseteq(\mathbb{N}\times\mathbb{Z})$, — гільбертів простір функцій

$$u(t,\Omega)=\sum_{(k,m)\in\Omega} u_{k,m}\ e^{\tau(m)t}x_k,$$

де $\tau(m)=(\ln\mu+i\,2\pi m)/T$, $\ln\mu$ — головне значення логарифма, зі скалярним добутком $\big(u(\cdot,\Omega),v(\cdot,\Omega)\big)^2_{d,r}=\sum_{(k,m)\in\Omega}(1+\|\alpha_k\|^2)^d(1+m^2)^r u_{k,m}\bar{v}_{k,m}$, що індукує норму

$$\|u(\cdot,\Omega)\|^2_{d,r}=\sum_{(k,m)\in\Omega}(1+\|\alpha_k\|^2)^d(1+m^2)^r|u_{k,m}|^2.$$

Введено припущення про ріст вектора α_k, а саме $\|\alpha_k\|>C|\nu_k|^{\beta_0}$, $C>0$, $\beta_0\in\mathbb{R}$.

Доведення розв'язності задачі проведено за ітераційною схемою Неша-Мозера. Розв'язок знайдено у вигляді границі послідовності гладких (аналітичних) функцій зі скінченно-вимірних підпросторів просторів $\mathbf{X}\mathcal{N}_{d,r}$.

Найбільш важливим моментом у схемі Неша-Мозера є отримання оцінок норм лінійних операторів, що виникають при обертанні лінеризованих операторів у кожній ітерації алгоритму, а основна трудність, яка з цим пов'язана — це їх діагональні елементи, які можуть бути як завгодно малими. Таким чином, нелокальна задача (1), (2) є некоректною за Адамаром, а її розв'язність залежить від проблеми малих знаменників, для подолання якої використано метричний підхід. Саме тому розв'язки задачі знайдено не на множині всіх параметрів задачі, а на множині тих параметрів, для яких власні значення лінеризованих операторів не є близькими до нуля. Проблему оборотності нескінченно-вимірного лінеризованого оператора вирішено, замінивши його послідовністю скінченно-вимірних, накладанням на кожному кроці схеми скінченного числа умов на параметри задачі.

SOLVABILITY OF NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A DIFFERENTIAL-OPERATOR EQUATION WITH WEAK NONLINEARITY

The nonlocal boundary-value problem for the operator-differential equation with weakly nonlinear right-hand side is investigated in the scale of spaces of functions of several real variables. The conditions of the sobvability of this problem are establish by using of the Nash-Mozer iteration scheme, where the main difficulty it is to get estimates of interpolation type for the inverse linearized operators obtained at each step of the iteration. The problem is incorrect in the Hadamard sense and its solvability depends on the small denominators which arising in the construction of the solution, so we used the metric approach.