Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2020»
26–28 травня 2020 р., Львів

УДК 517.5

ЛІНІЙНІ І КОЛМОГОРОВСЬКІ ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАСІВ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Михайло Гембарський, Світлана Гембарська

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки,
hembarskyi@gmail.com, gembarskaya72@gmail.com

У доповіді йдеться про точні за порядком оцінки колмогоровських і лінійних поперечників класів $B^{\omega}_{\infty,\theta}$ періодичних функцій однієї змінної у просторах Лебега $L_q = L_q([0, 2\pi])$, $1 \le q \le \infty$, наділених стандартною нормою $\|\cdot\|_{L_q}$, за певних обмежень щодо параметрів p, q і θ.

Класи $B^{\omega}_{p,\theta}$ визначаються на основі гладкісної характеристики їхніх елементів — функції ω типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови (S^{α}) і (S_l) [1, 2] (тоді пишемо $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$). Отже, якщо $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ і $1 \le p, \theta \le \infty$, то покладаємо (див. наприклад, [3] та [4])

$$B^{\omega}_{p,\theta} := \{f \in L^0_p : \ \|f\|_{B^{\omega}_{p,\theta}} \le 1\},$$

де

$$\|f\|_{B^{\omega}_{p,\theta}} = \|f\|_p + \left(\int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\omega_l(f,t)_p}{\omega(t)} \right)^{\theta} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{\theta}}, \ \ 1 \le \theta < \infty,$$

$$\|f\|_{B^{\omega}_{p,\infty}} = \|f\|_p + \sup_{t>0} \frac{\omega_l(f,t)}{\omega(t)},$$

Тут $L^0_p := \{f \in L_p([0, 2\pi]) : \int\limits_0^{2\pi} f(x)dx = 0\}$, $\omega_{\boldsymbol{l}}(f,t)_p = \sup_{|h|\le t} \|\triangle^l_h f\|_p$ — модуль гладкості порядку l функції f, а $\triangle^l_h f(x) = \sum\limits_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C^n_l f(x+nh)$ — l-та різниця функції $f \in L^0_p$ з кроком h.

Означимо апроксимаційні величини.

Нехай X — нормований простір з нормою $\|\cdot\|_X$, $\mathcal{L}_M(X)$ — сукупність підпросторів в X, розмірність яких не перевищує M, $L(X, L_M)$ — сукупність лінійних неперервних відображень X в $L_M \in \mathcal{L}_M(X)$ і W — центрально–симетрична множина в X.

Величина

$$\lambda_M(W, X) := \inf_{\substack{L_M \in \mathcal{L}_M(X) \\ \Lambda \in L(X, L_M)}} \sup_{w \in W} \|w - \Lambda\, w\|_X,$$

де нижню грань взято по всіх підпросторах L_M в $\mathcal{L}_M(X)$ і всіх лінійних неперервних операторах Λ, що діють з X в L_M, називається *лінійним* M *– поперечником* множини W у просторі X [5].

Величина

$$d_M(W,X) := \inf_{L_M \in \mathcal{L}_M(X)} \sup_{w \in W} \inf_{u \in L_M} \|w-u\|_X$$

називається *колмогоровським* M *– поперечником* множини W у просторі X [6].

Теорема 1. *Нехай* $1 \le q \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ *і* $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, *де* $\alpha > 0$, $l \in \mathbb{N}$. *Тоді справедливі оцінки*

$$d_M(B^{\omega}_{\infty,\theta}, L_q) \asymp \lambda_M(B^{\omega}_{\infty,\theta}, L_q) \asymp \omega(M^{-1}).$$

1. *Стечкин С. Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР, Сер. мат. – 1951. – 15. – С. 219–242.

2. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва – 1956. – 5, – С. 483–522.

3. *Sun Yongsheng, Wang Heping* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова – 1997. – 219. – С. 356–377.

4. *Пустовойтов Н. Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. – 1994. – 20. – С. 35–48.

5. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. – 1960. – 15, № 3. – С. 81–120.

6. *Kolmogoroff A.* Über die beste Annüherung von Fukctionen einer gegebenen Funktionenklasse // Anal. Math. – 1936. – 37, № 2. – 107–111.

LINEAR AND KOLMOGOROV WIDTHS OF THE CLASSES OF PERIODIC FUNCTIONS

The talk deals with the exact order estimates of the Kolmogorov $d_M(B^{\omega}_{\infty,\theta}, L_q)$ *and linear* $\lambda_M(B^{\omega}_{\infty,\theta}, L_q)$ *widths of the classes* $B^{\omega}_{p,\theta}$ *of periodic functions of one variable in the Lebesgue spaces* L_q *under certain restrictions on the parameters* p, q *and* θ. *The classes* $B^{\omega}_{p,\theta}$ *are determined by the smoothness characteristic for their elements — the function* ω *that is of the* l*-order modulus of continuity type, and satisfies the conditions* (S^{α}) *and* (S_l).

Theorem 1. *Let* $1 \le q \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ *and* $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, *where* $\alpha > 0$, $l \in \mathbb{N}$. *Then the following estimates hold*

$$d_M(B^{\omega}_{\infty,\theta}, L_q) \asymp \lambda_M(B^{\omega}_{\infty,\theta}, L_q) \asymp \omega(M^{-1}).$$