Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2020»
26 – 28 травня 2020 р., Львів

УДК 539.3

АНАЛІТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ТРИВИМІРНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ІЗОТРОПНИХ ТІЛ

Дмитро Бойко, Юрій Токовий.

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, dmytroboikoukr@gmail.com

У доповіді наведено методику побудови аналітичних розв'язків тривимірних задач теорії пружності для трансверсально ізотропних півпростору та шару у просторі подвійного інтегрального перетворення Фур'є за координатами, що відповідають площині ізотропії.

Розглянуто задачу теорії пружності для області $\mathcal{D} = \{(x, y, z) : |x| < \infty, |y| < \infty, h_1 < z < h_2\}$, віднесеної до безрозмірної декартової системи координат $Oxyz$, так що її обмежувальні поверхні $z = h_j$, $j = 1, 2$, є паралельними до площини ізотропії xOy. У випадку, коли область $\mathcal{D}$ є шаром, слід покласти $h_j = (-1)^j$; коли ця область є півпростором – $h_1 = -\infty$, $h_2 = 0$. За відсутності масових сил задача описується рівняннями рівноваги та суцільності [1], а також фізичними співвідношеннями для трансверсально ізотропного матеріалу

$$EE'\varepsilon_{xx} = E'(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) - \nu' E\sigma_{zz}, \quad G'\varepsilon_{xz} = \sigma_{xz}, \quad x \leftrightarrow y,$$

$$E'\varepsilon_{zz} = \sigma_{zz} - \nu'(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}), \quad G\varepsilon_{xy} = \sigma_{xy},$$

де $\sigma_{j\ell} = \sigma_{\ell j}$, $\varepsilon_{j\ell} = \varepsilon_{\ell j}$ – компоненти тензорів напружень та деформації, $\ell, j = \{x, y, z\}$; E, E' та $G = E/(2 + 2\nu)$, G' – модулі пружності та зсуву у площині ізотропії та у перпендикулярному до неї напрямку; ν та ν' – коефіцієнти Пуассона, що описують відповідно звуження (розширення) у перпендикулярному до площини ізотропії напрямку за розтягу (стиску) у паралельному до неї напрямку та звуження (розширення) у площині ізотропії за розтягу (стиску) у перпендикулярному до неї напрямку; символ "$x \leftrightarrow y$" означає отримання ще одного рівняння за допомогою взаємної перестановки індексів та змінних.

Обмежуючі площини шару та півпростору навантажено силами в розмірності напружень

$$\begin{gathered}\sigma_{zz}(x, y, \pm 1) = -p^{\pm}(x, y), \;\; \sigma_{jz}(x, y, \pm 1) = q_j^{\pm}(x, y), \\ \sigma_{zz}(x, y, 0) = -p^{0}(x, y), \;\; \sigma_{jz}(x, y, 0) = q_j^{0}(x, y), \;\; j = \{x, y\}.\end{gathered} \tag{1}$$

Шукаємо обмежений у віддалених точках $x^2 + y^2 \to \infty$ розв'язок у напруженнях, тому для півпростору задані та шукані функції повинні затухати також при $z \to -\infty$.

З використанням методики [1] задачу зведено до системи ключових рівнянь у напруженнях, розв'язок якої будуватимемо послідовно. Спочатку знайдемо напруження $\overline{\sigma}_{zz}$ у просторі інтегрального перетворення

$$\overline{f}(z) \equiv \overline{f}(z; s_x, s_y) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,z) \exp(-i(s_x x + s_y y)) dx dy,$$

де s_j, $j = \{x, y\}$ – параметри перетворення, $i^2 = -1$, як розв'язок рівняння

$$\frac{d^4 \overline{\sigma}_{zz}}{dz^4} - 2a_1 s^2 \frac{d^2 \overline{\sigma}_{zz}}{dz^2} + a_2 s^4 \overline{\sigma}_{zz} = 0. \tag{2}$$

Тут $s^2 = s_x^2 + s_y^2$,

$$a_1 = \frac{E}{E'} \frac{E' - 2(1+\nu)\nu' G'}{2(1-\nu^2)G'}, \quad a_2 = \frac{E}{E'} \frac{E' - E\nu'^2}{(1-\nu^2)E'}. \tag{3}$$

Внаслідок співвідношень між пружними характеристиками матеріалу у коефіцієнтах (3) є можливими три варіанти розв'язку: коли власні значення рівняння (2) є i) комплексними, ii) дійсними різними та iii) дійсними кратними. Для усіх трьох випадків розв'язок можна подати єдиним чином у вигляді

$$\overline{\sigma}_{zz}(z) = A_1 \exp(\lambda_1 |s| z) + B_1 \exp(-\lambda_1 |s| z) +$$

$$+ C_1 \exp(\lambda_2 |s| z)(1 + \delta_{\lambda_1,\lambda_2} z) + D_1 \exp(-\lambda_2 |s| z)(1 + \delta_{\lambda_1,\lambda_2} z),$$

де $\lambda_{1,2}$ – корені характеристичного рівняння (2) з додатніми дійсними частинами,

$$\lambda_\ell^2 = a_1 + (-1)^\ell \sqrt{a_1^2 - a_2}, \quad \ell = 1, 2,$$

$\delta_{\lambda_1,\lambda_2}$ – символ Кронекера. Сталі A_1, B_1, C_1, $D_1 \in \mathbb{C}$ визначаємо за допомогою крайових умов (1). Після відшукання осьових напружень, решту компонент тензора напружень знаходимо, послідовно розв'язуючи систему ключових рівнянь [1].

1. *Токовий Ю., Бойко Д.* Розв'язок тривимірної задачі термопружності для необмеженого трансверсально ізотропного тіла // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – 61, № 4. – С. 88–99.

Analytical solutions of three-dimensional elasticity problems for transversely isotropic solids

A technique for construction of solutions to three-dimensional elasticity problems for transversely isotropic half-space and layer is presented on the basis of the direct integration method. The technique provides a universal solution form covering all possible cases of material moduli interrelations.