

## СТАБІЛЬНИЙ РАНГ ДЕЯКИХ КЛАСІВ НЕКОМУТАТИВНИХ КІЛЕЦЬ

Білоус Андрій

Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України, a.bilous1610@gmail.com

Стабільний ранг є одним з основних інваріантів  $K$ -теорії. Це поняття, введене Н. Bass-ом [1], активно використовується у теорії кілець, зокрема в задачах діагональної редукції матриць [2, 3]. Водночас одержано ряд узагальнень поняття стабільного рангу. Зокрема, таким є поняття одиничного стабільного рангу [2]. Саме воно є надзвичайно актуальним в алгебраїчній  $K$ -теорії. Рядок  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  елементів кільця  $R$  називають правим унімодулярним, якщо існують елементи  $x_1, x_2, \dots, x_n \in R$  такі, що  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 1$ . Стабільним рангом кільця  $R$  називають таке найменше натуральне число  $n$ , для якого виконується умова: для довільного правого унімодулярного рядка  $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$  елементів кільця  $R$  існують такі елементи  $b_1, b_2, \dots, b_n \in R$ , що рядок  $(a_1 + a_{n+1}b_1, a_2 + a_{n+1}b_2, \dots, a_n + a_{n+1}b_n)$  є правим унімодулярним. Якщо такого натурального  $n$  не існує, то вважаємо, що стабільний ранг кільця  $R$  дорівнює нескінченності.

Таким чином, кільце  $R$  є кільцем стабільного рангу 1, якщо для довільних елементів  $a, b \in R$  таких, що  $aR + bR = R$ , існує елемент  $t \in R$ , що  $a + bt$  є оборотним елементом кільця  $R$ . У праці [4] наведено приклади кілець стабільного рангу 1, а також встановлено найпростіші їхні властивості.

Подібно, кільце  $R$  є кільцем стабільного рангу 2, якщо для довільних елементів  $a, b, c \in R$  таких, що  $aR + bR + cR = R$ , виконується рівність  $(a + cx)R + (b + cy)R = R$  для деяких  $x, y \in R$ .

Доведено, що адекватне справа дуо кільце з ненульовим радикалом Джекобсона має стабільний ранг один. Установлено, що клас повних матриць порядку 2 над дуо кільцем елементарних дільників має стабільний ранг один. Досліджено деякі класи одинично-регулярних і чистих матриць над дуо кільцем.

**Теорема 1.** *Нехай  $R$  є адекватне справа дуо кільце таке, що його радикал Джекобсона є ненульовим. Тоді стабільний ранг кільця  $R$  дорівнює 1.*

**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2020»,  
26–28 травня 2020 р., Львів**

**Теорема 2.** *Нехай  $R$  є адекватним справа дуо кільцем. Тоді стабільний ранг кільця  $R$  дорівнює 2.*

**Теорема 3.** *Нехай  $R$  є дуо кільцем Ерміта. Якщо  $aR + xR = R$  і  $cR + zR + (ay - bx)R = R$ , тоді для матриць*

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$$

*існують такі оборотні матриці  $U$ ,  $V$  і одинична матриця  $E$ , що  $AU + BV = E$ .*

**Теорема 4.** *Нехай  $R$  є дуо кільцем Ерміта. Нехай  $A, B \in M(2, R)$  – матриці над кільцем  $R$  такі, що  $AM(2, R) + BM(2, R) = M(2, R)$ , і матриця  $B$  має властивість діагональної редуції. Тоді існує повна матриця  $T \in F(2, R)$  така, що  $A + BT$  є оборотною матрицею.*

1. Bass H. K-theory and stable algebra // Publ. Math. I.H.É.S. – 1964. – 22. – P. 5–60.
2. Zabavsky B. V. Diagonalizability theorem for matrices over ring with finite stable range // Algebra and Discrete Mathematics. – 2005. – 4, No. 1. – P. 151–165.
3. Zabavsky B. Diagonalization of matrices over ring with finite stable range // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – Вип. 61. – С. 206–211.
4. Vaserstein L. N. Bass's first stable range condition // J. Pure Appl. Algebra. – 1984. – 34, No. 2-3. – P. 319–330. – [https://doi.org/10.1016/0022-4049\(84\)90044-6](https://doi.org/10.1016/0022-4049(84)90044-6).
5. Гаталевич А. І. Про адекватні і узагальнено адекватні дуо-кільця і дуо-кільця елементарних дільників // Мат. студії. – 1998. – 9, № 2. – С. 115–119.
6. Chen H. Rings with many idempotents // Int. J. Math. & Math. Sci. – 1999. – 22, No. 3. – P. 547–558. – <https://doi.org/10.1155/S0161171299225471>.
7. Helmer O. The elementary divisor theorem for certain rings without chain conditions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – 49, No. 4. – P. 225–236.

## **STABLE RANGE OF SOME CLASSES OF NON COMMUTATIVE RINGS**

*It is proved that the right adequate duo ring with a nonzero Jacobson radical has a stable range one. It is established that the class of complete matrices of order 2 over the duo ring of elementary divisors has a stable range one. Some classes of unit-regular and clean matrices over a duo ring are studied.*