Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2020»
26–28 травня 2020 р., Львів

УДК 517.927

ПРО НЕПЕРЕРВНІСТЬ ЗА ПАРАМЕТРОМ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕОДНОРІДНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ У ПРОСТОРАХ СОБОЛЄВА

Олена Атласюк, Володимир Михайлець

Інститут математики НАН України,
atlasiuk@imath.kiev.ua, mikhailets@imath.kiev.ua

Нехай задано скінченний інтервал $(a,b) \subset \mathbb{R}$ та числові параметри $\{m,\, n,\, r\} \subset \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$. Позначимо через $W_p^n = W_p^n\big([a,b];\mathbb{C}\big) := \big\{y \in C^{n-1}[a,b] \colon y^{(n-1)} \in AC[a,b],\, y^{(n)} \in L_p[a,b]\big\}$ комплексний простір Соболєва.

Зафіксуємо число $\varepsilon_0 > 0$. Розглянемо лінійну крайову задачу, залежну від числового параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$:

$$L(\varepsilon)y(t,\varepsilon) := y^{(r)}(t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t,\varepsilon)y^{(r-j)}(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad t \in (a,b), \tag{1}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot;\varepsilon) = c(\varepsilon), \tag{2}$$

де при кожному фіксованому ε матриці-функції $A_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^n)^{m\times m}$, вектор-функція $f(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^n)^m$, вектор $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$ та лінійний неперервний оператор $B(\varepsilon) \colon (W_p^{n+r})^m \to \mathbb{C}^{rm}$ довільно задано; а вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon) \in (W_p^{n+r})^m$ є невідомою.

Розв'язком крайової задачі (1), (2) є вектор-функція $y(\cdot,\varepsilon)$, яка задовольняє рівняння (1) (при $n \geq 1$ скрізь, а при $n = 0$ майже скрізь) на (a,b), та рівність (2), яка задає rm скалярних крайових умов. Крайова умова (2) є найбільш загальною для рівняння (1). Вона охоплює як усі відомі типи класичних крайових умов: задачі Коші, дво- та багатоточкові, інтегральні та мішані задачі, так і ряд некласичних задач. Останні можуть містити похідні цілого та дробового порядку k, де $0 < k \leq n + r$.

Крайовій задачі (1), (2) відповідає лінійний оператор

$$(L(\varepsilon), B(\varepsilon)) \colon (W_p^{n+r})^m \to (W_p^n)^m \times \mathbb{C}^{rm}. \tag{3}$$

Згідно з [1], (3) є обмеженим фредгольмовим оператором з індексом нуль.

Нехай виконана **умова (0):** гранична однорідна крайова задача вигляду (1), (2) має лише тривіальний розв'язок.

Також розглянемо **граничні умови** при $\varepsilon \to 0+$:

(I) $A_{r-j}(\cdot;\varepsilon) \to A_{r-j}(\cdot;0)$ у просторі $(W_p^n)^{m\times m}$ для кожного номера $j \in \{1,\dots,r\}$;

(II) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ у просторі $\mathbb{C}^{rm}$ для довільної вектор-функції $y \in (W_p^{n+r})^m$.

Говоримо, що розв'язок крайової задачі (1), (2) неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$, якщо виконуються такі умови:

($*$) існує таке додатне число $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$, що для кожного $\varepsilon \in [0,\varepsilon_1)$, довільних правих частин $f(\cdot;\varepsilon) \in (W_p^n)^m$ і $c(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$ ця задача має єдиний розв'язок $y(\cdot;\varepsilon)$, який належить простору $(W_p^{n+r})^m$;

($**$) зі збіжності правих частин $f(\cdot;\varepsilon) \to f(\cdot;0)$ в $(W_p^n)^m$ та $c(\varepsilon) \to c(0)$ в $\mathbb{C}^{rm}$ при $\varepsilon \to 0+$ випливає збіжність розв'язків

$$y(\cdot;\varepsilon) \to y(\cdot;0) \quad \text{у} \quad (W_p^{n+r})^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,.$$

Теорема 1 ([2, 4]). *Розв'язок крайової задачі* (1), (2) *неперервно залежить від параметра* ε *при* $\varepsilon = 0$ *тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умову* (0) *та граничні умови* (I), (II).

Для випадку $1 \le p < \infty$, ця теорема іншим способом встановлена в [3]. Але метод роботи [3] не дозволяє охопити випадок $p = \infty$.

1. *Атласюк О. М., Михайлець В. А.* Про розв'язність неоднорідних крайових задач у просторах Соболєва // Доп. НАН України. – 2019. – № 11. – С. 3 – 7.
2. *Atlasiuk O. M., Mikhailets V. A.* On Fredholm parameter-dependent boundary-value problems in Sobolev spaces // Dopov. Nats. Acad. Nauk Ukr. – 2020. – № 6.
3. *Hnyp Y. V., Mikhailets V. A., Murach A. A.* Parameter-dependent one-dimensional boundary-value problems in Sobolev spaces // Electronic Journal of Differential Equations. – 2017. – 2017, № 81. – P. 1 – 13.
4. *Atlasiuk O., Mikhailets V.* Continuity in a parameter of solutions to boundary-value problems in Sobolev spaces // arXiv:2005.03494 [math.CA].

ON CONTINUITY IN A PARAMETER OF SOLUTIONS TO INHOMOGENEOUS BOUNDARY-VALUE PROBLEMS IN SOBOLEV SPACES

We consider the most general class of linear inhomogeneous boundary-value problems for systems of ordinary differential equations of an arbitrary order whose solutions and right-hand sides belong to appropriate Sobolev spaces. For parameter-dependent problems from this class, we prove a constructive criterion for their solutions to be continuous in the Sobolev space with respect to the parameter. We also prove a two-sided estimate for the degree of convergence of these solutions to the solution of the nonperturbed problem.