**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2020»,
26–28 травня 2020 р., Львів**

УДК 539.3

ФУНКЦІЇ БУССІНЕСКА ТРИВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВПРОСТОРУ З ДИПОЛЕМ ТЕПЛА

Роман Андрійчук

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, andriychukroman@gmail.com

Доповідь присвячена побудові функцій Буссінеска задач термопружності для півбезмежного простору із вільною, жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею за нульової температури або теплоізоляції на ній при дії диполя тепла. Температурне поле записуємо у вигляді

$$T(r,z)=t_0(r,z)+t(r,z),$$

де $t_0(r,z)$ – задане температурне поле, $t(r,z)$ – збурене температурне поле.

Граничну умову теплоізоляції на включенні запишемо так:

$$\frac{\partial T(r,z)}{\partial z}=0 \text{ або } \frac{\partial t(r,z)}{\partial z}=-\frac{\partial t_0(r,z)}{\partial z}.$$

В циліндричній системі координат з початком на межі півпростору і віссю Oz, перпендикулярною до неї, температурне поле від диполя тепла сталої потужності γ, розміщеного на віддалі h від межі, записуємо у вигляді

$$t(r,z)=\frac{\gamma}{4\pi}\left(\frac{z-h}{R_1^3(r,z)}+(-1)^k\frac{z+h}{R_2^3(r,z)}\right),\quad R_{1,2}(r,z)=\sqrt{r^2+(z\mp h)^2},$$

де $k=1$ відповідає теплоізоляції, а $k=2$ – нульовій температурі межі тіла.

Механічні крайові умови подамо так:

– для вільної межі

$$\sigma_{zz}(r,0)=0,\quad \sigma_{rz}(r,0)=0;$$

– для жорстко закріпленої межі

$$u_r(r,0)=0,\quad u_z(r,0)=0;$$

– для гладко закріпленої межі

$$u_z(r,0)=0,\quad \sigma_{rz}(r,0)=0;$$

– для гнучко закріпленої межі

$$u_r(r,0)=0,\quad \sigma_{zz}(r,0)=0.$$

Компоненти вектора переміщень і тензора напружень шукаємо у вигляді

$$u(r,z)=\bar{u}(r,z)+\bar{\bar{u}}(r,z),\qquad \sigma(r,z)=\bar{\sigma}(r,z)+\bar{\bar{\sigma}}(r,z),$$

де перші доданки характеризують напружено-деформований стан безмежного тіла, а другі – переміщення і напруження у півпросторі, які забезпечують виконання механічних крайових умов.

Переміщення і напруження у безмежному тілі визначаються через термопружний потенціал переміщень

$$f(r,z) = -A\left[\frac{z-h}{R_1(r,z)} - (-1)^k \frac{z+h}{R_2(r,z)}\right], \quad A = \frac{m\gamma}{8\pi}, \qquad m = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t \,,$$

де α_t і ν – коефіцієнти лінійного теплового розширення і Пуассона.

Переміщення $\overset{=}{u}(r,z)$ і напруження $\overset{=}{\sigma}(r,z)$ визначимо за допомогою функції Буссінеска F, яку подамо у вигляді суми двох гармонічних функцій

$$F(r,z) = \varphi(r,z) + z\psi(r,z).$$

Переміщення і напруження визначаються формулами

$$\overset{=}{u}_r = \frac{\partial F}{\partial r}, \qquad \overset{=}{\sigma}_{zz} = 2G\left[\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - 2(2-\nu)\frac{\partial\psi}{\partial z}\right],$$

$$\overset{=}{u}_z = \frac{\partial F}{\partial z} - 4(1-\nu)\psi, \quad \overset{=}{\sigma}_{rz} = 2G\left[\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z} - 2(1-\nu)\frac{\partial\psi}{\partial r}\right].$$

Якщо диполі тепла розподілені у паралельній до межі півпростору круговій області S, то напруження в декартовій системі координат $Ox_1x_2x_3$ з початком у центрі круга і осями Ox_1 і Ox_2, розташованими в області S, визначається за формулою

$$\sigma_{ij}^*(x_1,x_2,z) = \iint\limits_S \gamma(\xi_1,\xi_2)\sigma_{ij}(x_1,x_2,z;\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2 \,,$$

де $r = \sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2}$. У зв’язку з перенесенням початку системи координат з межі півпростору в область S

$$R_1(r,z) = \sqrt{r^2+z^2}, \qquad R_2(r,z) = \sqrt{r^2+(z+2h)^2}.$$

BOUSSINESQ’S FUNCTIONS OF THE 3D THERMOELASTICITY PROBLEM FOR HALF-SPACE AT THE ACTION OF A THERMAL DIPOLE

At the action of a thermal dipole, Boussinesq’s functions of the thermoelasticity problem for half-space with free, rigidly, smoothly or flexibly fastened boundary, on which zero temperature or thermal insulation is given, are constructed. Green`s functions, derived by using Boussinesq’s functions, used to determine thermoelastic state of the half-space caused by perturbation of a given heat flux by heat-proof thin inclusion parallel to the boundary of a half-space.