

## ЗБІЖНІСТЬ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ З ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИМИ ЗАМІНАМИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО-ЗБУРЕНОЇ ЗАДАЧІ АДВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ- РЕАКЦІЇ

Юлія Турчин

Львівський національний університет ім. І. Франка, juliaturchyn@gmail.com

У даній роботі розглянуто сингулярно-збурену початково-крайову задачу адвекції-дифузії-реакції (АДР). Відомо, що застосування класичного підходу методу скінченних елементів (МСЕ) призводить до втрати стійкості апроксимацій. Автором запропоновано новий підхід до розв'язання цієї актуальної проблеми, який не вимагає використання нерегулярних сіток,  $h$ -р адаптивних сіток, протипотокових схем, тощо, які можуть значно ускладнювати програмну реалізацію методу.

Нехай  $\Omega$  — обмежена зв'язна область з ліпшицевою границею  $\Gamma$ . Необхідно знайти  $c$  — невідому концентрацію, що є розв'язком задачі

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (Vc) - \nabla \cdot (K \cdot \nabla c) + \sigma c &= f(x, t); \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T]; \\ c(x, 0) &= 0; \quad x \in \bar{\Omega}; \\ \nu \cdot (K \cdot \nabla c) + \lambda c &= \psi; \quad x \in \Gamma, \quad t \in (0, T]. \end{aligned} \quad (1)$$

де  $V = (V_1, V_2)$ , усі коефіцієнти додатні, сталі і безрозмірні, а отже, середовище є нестисливим. У (1) здійснимо заміну виду [1]

$$c = u \exp\left(\frac{V_1 x_1 + V_2 x_2}{2K}\right). \quad (2)$$

Далі, введемо простір  $W = W_2^{(1)}(\Omega)$  і наведемо варіаційне формулювання вихідної задачі, застосуємо формулу Гріна до оператора Лапласа. Після цього, здійснимо зворотню до (2) заміну у вихідному рівнянні. В результаті, здійснивши низку допоміжних перетворень, одержимо варіаційне формулювання задачі методом експоненціальної заміни. Знайти таку  $c(x, t) \in L_2(0, T; W)$ , що

$$\int_{\Omega} \frac{\partial c}{\partial t} w \tilde{p} d\Omega + K \int_{\Omega} \nabla c \nabla w \tilde{p} d\Omega + \sum_{i=1,2} \frac{V_i}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial c}{\partial x_i} w \tilde{p} d\Omega + \int_{\Gamma} \lambda c w \tilde{p} d\Gamma + \sigma \int_{\Omega} c w \tilde{p} d\Omega = \int_{\Omega} f w \tilde{p} d\Omega + \int_{\Gamma} \psi w \tilde{p} d\Gamma, \quad \forall w \in W, \quad (3)$$

де  $\tilde{p} = \exp\left(-\frac{V_1 x_1 + V_2 x_2}{2K}\right)$ . Доведено, що відповідна білінійна форма є

неперервною та V-еліптичною. У випадку стаціонарної сингулярно-збуреної задачі показано існування і єдиність слабкого розв'язку, а також те, що застосування лінійного базису [2] при дискретизації (3) дає апіорну оцінку похибки наближеного розв'язку  $c_h$  до точного розв'язку  $c$

$$\|c - c_h\|_{W_2^{(1)}} \leq C_1 h \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\max\{V_1, V_2\} S_{\Omega}}{K \max_{\Omega}\{\tilde{p}^{-1}\}} \|c\|_{W_2^{(2)}}. \quad (4)$$

Проведено числові експерименти для сингулярно-збурених задач АДР. Наведено графіки одержаних розв'язків у стаціонарному [3] та нестаціонарному випадках, таблиці похибок та експериментальний порядок збіжності запропонованого методу, чим показано його ефективність.

1. *Карташов Э. М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – Москва: Высшая школа, 1985. – 480 с.
2. *Савула Я. Г.* Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами – Львів: видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2004. – 221 с.
3. *Турчин Ю. І.* Експоненціальна заміна у методі скінченних елементів для рівнянь адвекції-дифузії. // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. Науковий збірник. – 2017. – Випуск 24. – С. 111–117.

### **THE CONVERGENCE OF FINITE ELEMENT METHOD WITH EXPONENTIAL REPLACEMENT FOR SINGULAR-PERTURBED PROBLEM OF ADVECTION-DIFFUSION-REACTION**

*In this work a new approach for numerical approximation of the solution for the initial-boundary problem of advection-diffusion-reaction (ADR) is proposed. This approach is based on exponential direct and inverse replacements, before and after variation formulations, respectively. Theoretical results of existence of the solution and of the order of convergence are obtained. Numerical experiments are conducted for singularly perturbed ADR problems.*