

ЕЛЕМЕНТ МАЙЖЕ СТАБІЛЬНОГО РАНГУ 1 НАД КОМУТАТИВНОЮ ОБЛАСТЮ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДІЛЬНИКІВ

Андрій Романів

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача
НАН України, romaniv_a@ukr.net

Нехай R – комутативне кільце з 1 і $1 \neq 0$. Кільце R є кільцем стабільного рангу 1, якщо для довільних елементів $a, b \in R$ з рівності $aR + bR = R$ випливає, що існує елемент $t \in R$ такий, що $(at + b)R = R$.

Кільце R є областю елементарних дільників [1], якщо кожна матриця A над R має властивість канонічної діагональної редукції.

Ненульовий елемент $a \in R$ є адекватним до елемента $b \in R$ (будемо позначати цей факт aAb), якщо знайдуться такі елементи $r, s \in R$, що $a = rs$ задовольняє наступним умовам:

- 1) $rR + bR = R$,
- 2) $s'R + bR \neq R$ для деякого необоротного дільника s' елемента s .

Якщо для довільного елемента $b \in R$ маємо aAb , тоді будемо говорити, що елемент a є адекватним. Якщо довільний ненульовий елемент кільця R є адекватним елементом, тоді кільце R називається адекватним. Зауважимо, що будь-який ненульовий елемент $a \in R$ є адекватним сам до себе, тобто aAa . Прикладами адекватних елементів є одиниці, елементи вільні від квадратів і факторіальні елементи [2].

Згідно [3] ненульовий та необоротний елемент $a \in R$ є елементом майже стабільного рангу 1, якщо фактор кільце R/aR має стабільний ранг 1, тобто для довільних елементів $b, c \in R$ таких, що $aR + bR + cR = R$ існує елемент $t \in R$ такий, що $aR + (bt + c)R = R$.

Теорема. *Нехай R – комутативна область елементарних дільників, яка не є кільцем стабільного рангу 1. Тоді існує ненульовий та необоротний елемент $a \in R$ та для довільних $b, c \in R$ таких, що $aR + bR + cR = R$ існує елемент $t \in R$ такий, що $aR + (bt + c)R = R$ і елемент a є адекватним до елемента t , тобто aAt .*

**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2019»,
27–29 травня 2019 р., Львів**

Наслідок. *Нехай R – комутативна область елементарних дільників, яка не є кільцем стабільного рангу 1. Тоді існують ненульовий і необоротний елементи майже стабільного рангу 1.*

Зауважимо, що в кільці стабільного рангу 1 довільний ненульовий і необоротний елемент є елементом майже стабільного рангу 1.

1. *Kaplansky I.* Elementary divisor and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – 66. – P. 464–491.
2. *Zabavsky B. V.* Diagonal reduction of matrices over rings // Mathematical Studies, Monograph Series, V, XVI, VNTL Publishers, Lviv. – 2012.–P. 251.
3. *Zabavsky B. V.* Conditions for stable range of an elementary divisor ring // Communications in Algebra. – 2016. – 45, № 9. – P. 4062–4066.

**AN ELEMENT WITH ALMOST STABLE RANGE 1 OVER A
COMMUTATIVE ELEMENTARY DIVISOR DOMAIN**

It is shown that in a commutative elementary divisor domain which is not a ring of stable range 1 exists nonzero and nonunit element with almost stable range 1.