Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2019», 27–29 травня 2019 р., Львів

УДК 517.95

ЗАДАЧА ТИПУ ДІРІХЛЕ-НЕЙМАНА ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНИХ ВІДНОСНО СТАРШОЇ ПОХІДНОЇ ЗА ЧАСОМ

Софія Репетило, Михайло Симотюк

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, RepetyloSofiya@gmail.com

В області $Q_T^p = \{(t,x) : 0 < t < T,\ x \in \Omega^p\}$, $T > 0$, $\Omega^p - p$-вимірний тор $(\mathbf{R}/\ 2\pi\mathbf{Z})^p$, $p \in \mathbf{N}$, розглянуто задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right) u(t,x) := A_0(D)\frac{\partial^{2n} u}{\partial t^{2n}} + \sum_{j=0}^{2n-1} A_{2n-j}(D)\frac{\partial^j u}{\partial t^j} = 0, \tag{1}$$

$$\begin{cases} U_j[u] := \partial^{2j-2} u(t,x)/\ \partial t^{2j-2}\Big|_{t=0} = \varphi_j(x), \quad j = 1,\ldots,n, \\ U_{n+j}[u] := \partial^{2j-1} u(t,x)/\ \partial t^{2j-1}\Big|_{t=T} = \varphi_{n+j}(x), \quad j = 1,\ldots,n, \end{cases} \tag{2}$$

де $D = (-i\partial/\partial x_1,\ldots,-i\partial/\partial x_p)$, $A_j(D)$, $j = 0,1,\ldots,2n,$ – диференціальні вирази порядків N_j, $j = 0,1,\ldots,2n,$ відповідно, $\max\limits_{1\le j\le 2n} N_j < N_0$. Вважаємо, що для всіх $k \in \mathbf{Z}^p$ виконується оцінка $|A_0(k)| \ge C_1 (1+|k|)^{N_0}$, де $C_1 > 0$.

Для рівнянь із частинними похідними, розв'язаних відносно старшої похідної за часом ($A_0(D) \equiv 1$), задачі з умовами (2) вивчались у працях [1, 2]. Дана робота є поширенням результатів праці [3] на випадок задачі Діріхле-Неймана (1), (2) з виразом $A_0(D)$, домінуючим над $A_j(D)$, $j = 1,\ldots,2n$.

Нехай $f_1(t,k),\ldots,f_{2n}(t,k)$ – нормальна (при $t = 0$) фундаментальна система розв'язків диференціального рівняння $L(d/\ dt,k)y(t) = 0$; $\Delta(k) = \det \| U_j[f_q(t,k)]\|_{j,q=1}^{2n}$, $k \in \mathbf{Z}^p$; H_q, $q \ge 0$, – простір функцій $v(x) = \sum_{|k|\ge 0} v_k \exp(ik,x)$, для яких $\| v; H_q \|^2 := \sum_{|k|\ge 0} (1+k^2)^q |v_k|^2 < \infty$; $C^p([0,T], H_q)$ – простір таких функцій $v(t,x)$, що для кожного $t \in [0,T]$

функції $\partial^r v(t,x)/\partial t^r$, $r = 0,1,\ldots,p$, належать до простору H_q та є неперервними за $t \in [0,T]$ у нормі цього простору;

$$\left\| v; C^p([0,T], H_q) \right\| := \sum_{r=0}^{p} \max_{0 \le t \le T} \left\| \partial^r v / \partial t^r ; H_q \right\|.$$

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $C^{2n}([0,T], H_{N_0})$ *необхідно і досить, щоб справджувались умови*

$$\forall k \in \mathbf{Z}^p \qquad \Delta(k) \neq 0. \qquad (3)$$

Теорема 2. *Нехай існує така стала* $\delta_0 > 0$, *що для всіх* $k \in \mathbf{Z}^p$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(k)| \ge \delta_0. \qquad (4)$$

Якщо $\varphi_j \in H_\alpha$, $\alpha \ge N_0$, $j = 1,\ldots,2n$, *то у просторі* $C^{2n}([0,T], H_{N_0})$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), *який неперервно залежить від функцій* $\varphi_j(x)$, $j = 1,\ldots,2n$.

Знайдено діапазон значень T, для яких нерівності (3), (4) виконуються для всіх $k \in \mathbf{Z}^p$. Розглянуто випадок, коли $\max\limits_{1 \le j \le 2n} N_j \ge N_0$.

1. *Ptashnyk B. Yo., Repetylo S. M.* Dirichlet–Neumann problem in a strip for hyperbolic equations with constant coefficients // J. Math. Sci. – 2015. – 205, № 4. – P. 501–517.
2. *Репетило С. М., Симотюк М. М.* Задача Діріхле–Неймана для рівнянь із частинними похідними високого порядку зі сталими коефіцієнтами // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2018. – Вип. 16. – С. 147–153.
3. *Бобик І. О., Симотюк М. М.* Задача з двома кратними вузлами для рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старщої похідної за часом // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2004. – Вип. 2. – С. 46–55.

DIRICHLET–NEUMANN TYPE PROBLEM FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WHICH ARE NOT SOLVED FOR THE HIGHER TIME DERIVATIVE

The conditions of unique solvability for the Dirichlet–Neumann type problem for partial differential equations which are not solved for the higher time derivative have been established. It is shown that the solvability of the problem is not related to the problem of small denominators.