**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2019»,
27–29 травня 2019 р., Львів**

УДК 512.643.4

ПРО РОЗВ'ЯЗКИ МАТРИЧНОГО РІВНЯННЯ AX+BY=C НАД КВАДРАТИЧНИМИ ЕВКЛІДОВИМИ КІЛЬЦЯМИ

Наталія Ладзоришин

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача
НАН України, natalja.ladzoryshyn@gmail.com

Розглянемо матричне діофантове рівняння

$$AX + BY = C, \tag{1}$$

де $A, B, C \in M\left(n, \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]\right)$. В [1] описано цілочислові розв'язки цього рівняння, тобто розв'язки $X, Y \in M\left(n, \mathbb{Z}\right)$, зокрема, встановлено необхідні і достатні умови існування та єдиності таких розв'язків. В [2] запропоновано критерій розв'язності та спосіб розв'язування рівняння (1). На основі встановленої в [3] спеціальної нижньої трикутної форми матриці з інваріантними множниками на головній діагоналі, ми описуємо структуру розв'язків матричного рівняння (1) над квадратичним евклідовим кільцем $\mathbb{K} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$.

Для пари матриць A, B із матричного рівняння (1) існують такі оборотні матриці $S \in GL(n, \mathbb{Z})$ і $Q^A, Q^B \in GL(n, \mathbb{K})$, що

$$SAQ^A = T^A,\ SBQ^B = T^B,$$

де T^A, T^B – трикутні форми з інваріантними множниками на головних діагоналях матриць A і B, відповідно [3]. Тоді з матричного рівняння (1) одержимо таке матричне рівняння

$$T^A(Q^A)^{-1}X + T^B(Q^B)^{-1}Y = SC.$$

Для матриці SC існує така оборотна матриця $V \in GL(n, \mathbb{K})$, що $SCV = \tilde{C}$, де $\tilde{C}$ – нижня трикутна матриця. Тоді одержимо таке рівняння

$$T^A H + T^B W = \tilde{C}, \tag{2}$$

де

$$H = (Q^A)^{-1} XV,\ W = (Q^B)^{-1} YV,\ \tilde{C} = SCV. \tag{3}$$

Рівняння (1) і (2) еквівалентні, тобто рівняння (1) є розв'язним тоді і тільки тоді, коли розв'язним є рівняння (9), і кожному розв'язку X, Y рівняння (1) відповідає розв'язок H,W рівняння (2), і навпаки, згідно зі спів відно-шеннями (3).

Теорема. *Матричне рівняння (2), в якому* $(\det A, \det B) = 1$, *є розв'язне і має такі розв'язки* $H = \left\| h_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n}$, $W = \left\| w_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n}$, *що*

1) $h_{ij} = 0$, *якщо* $\mu_i^B = 1$, $i, j = 1, 2, ..., n$,

2) $e(h_{ij}) < e(\mu_i^B)$, *якщо* $h_{ij} \neq 0$, $i, j = 1, 2, ..., n$,

де $\mu_1^B, \mu_2^B, \ldots, \mu_n^B$ *– інваріантні множники матриці* B, $e(a)$ *– евклідова норма числа* $a \in \mathbb{K}$.

Нехай $\mathbb{K} = \mathbb{Z}\left[\sqrt{k}\right]$ *– квадратичне евклідове уявне кільце. Тоді матричне рівняння (2) має скінченну кількість розв'язків* H, W *з умовами 1), 2).*

За розв'язками H,W матричного рівняння (2) будуємо розв'язки X,Y матричного рівняння (1) згідно зі співвідношеннями (3).

1. *Ладзоришн Н. Б.* Цілочислові розв'язки матричних лінійних односторонніх і різносторонніх рівнянь над квадратичними кільцями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – № 58 (2). – С. 47–54.
   Те саме: *Ladzoryshyn N. B.* The integral solutions of matrix linear unilateral and bilateral equations over quadratic rings // J. Math. Sci. – 2017. – No. 223 (1) – P. 50–59. – doi:10.1007/s10958-017-3337-0.
2. *Ладзоришин Н. Б., Петричкович В. М.* Матричні лінійні одно та двобічні рівняння над квадратичними кільцями // Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. – 2018. – № 85. – С. 32–40.
3. *Ladzoryshyn N., Petrychkovych V.* Equivalence of pairs of matrices with relatively prime determinants over quadratics rings of principal ideals // Bul. Acad. Stinte Repub. Mold. Mat. – 2014. – № 3 (76). – С. 38–48.

SOLUTIONS OF THE MATRIX EQUATION AX+BY=C OVER EUCLIDEAN QUADRATIC RINGS

The structure of solutions of the matrix equation AX+BY=C over Euclidean quadratic rings is described.