

АНАЛІЗ ГАРМОНІК КВАДРАТИЧНО НЕЛІНІЙНОЇ ГІПЕРПРУЖНОЇ ПЛОСКОЇ ПОЗДОВЖНЬОЇ ХВИЛІ

Олена Хотенко, Ірина Хотенко

Інститут механіки ім.С.П.Тимошенка НАН України, h.khotenko@gmail.com

Дана робота є продовженням дослідження генерації другої і наступних гармонік поздовжньою хвилею, що поширюється в середовищі з нелінійними властивостями, яке має довільну природу. У квадратично нелінійному середовищі гармонічна хвиля генерує свою другу гармоніку [1]. Проведено числове моделювання генерації перших чотирьох гармонік (першої, другої, четвертої, восьмої), використовуючи метод Ван-дер-Поля (метод повільно змінюваних амплітуд) у випадку плоскої поздовжньої гармонічної хвилі в гіперпружному матеріалі, деформування якого відбувається квадратично нелінійно у відповідності з класичною моделлю Мурнагана [2, 3]. Ця задача вивчалася раніше авторами аналітично [1]. Для моделювання вибрано сімейство волокнистих композитних матеріалів з внутрішньою структурою мікро- і нанорівня. Використання таких матеріалів вносить додаткові реальні обмеження на вибір основних параметрів і дозволяє моделювати різні ситуації: від випадку, коли всі гармоніки, що розглядаються, можуть бути спостережені для реальних відстаней і реального часу поширення хвилі, до випадку, коли лише друга гармоніка може бути спостережена для реальних відстаней і реального часу поширення хвилі.

Рух квадратично нелінійної плоскої поздовжньої хвилі описується нелінійним хвильовим рівнянням:

$$\rho \ddot{u} - (\lambda + 2\mu)u'' = Nu''u' \text{ або } \ddot{u} - \frac{\omega^2}{k^2}u'' = \frac{N}{\rho}u''u', \text{ або } \ddot{u} - (v_{ph})^2 u'' = \frac{N}{\rho}u''u', \quad (1)$$

де $u(x, t)$ – поздовжнє переміщення; x – пройдений хвилею шлях; t – час поширення хвилі; ρ – стала густина; λ, μ – пружні сталі другого порядку (сталі Ляме); A, B, C – пружні сталі третього порядку (сталі Мурнагана); $N = 3(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)$; ω – частота гармонічної хвилі; k – хвильове число; $v_{ph} = \sqrt{\lambda + 2\mu/\rho} = (\omega/k)$ – фазова швидкість плоскої поздовжньої хвилі; точкою позначено диференціювання за часом t , штрихом – диференціювання за просторовою змінною x .

**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2019»,
27–29 травня 2019 р., Львів**

Розв'язок в рамках перших трьох наближень матиме вигляд:

$$u(x,t) = u^{(0)}(x,t) + u^{(1)}(x,t) + u^{(2)}(x,t) = u_o \cos(kx - \omega t) + u_o Mx \cos 2(kx - \omega t) + u_o M^3 x^3 \left[-\frac{8}{3} + \frac{5}{2kx} \sin 4(kx - \omega t) + \left(\frac{4}{3} - \frac{11}{8k^2 x^2} \right) \cos 4(kx - \omega t) \right]. \quad (2)$$

Проаналізовано вклад кожного наближення до загальної хвильової картини. Головні хвильові ефекти в рамках розв'язку у вигляді трьох наближень полягають у тому, що хвиля спочатку слабо відрізняється від лінійної гармонічної, далі зі зростанням пройденої хвилею відстані або часу поширення хвилі перша гармоніка складається з другою і четвертою гармоніками, утворюючи слабо модульовану хвилю. З часом вплив другої гармоніки зростає і вона стає домінуючою. Однак, з подальшим зростанням часу може збільшуватися вплив четвертої гармоніки і домінуючою може виявитися вона.

1. *Руцицкий Я. Я.* Об анализе квадратично нелинейной гиперупругой плоской продольной волны // Прикладная механика. – 2009. – 45, № 2. – С. 80–93.
2. *Руцицкий Я. Я., Хотенко Е. А.* О волне Рэлея в квадратично нелинейном упругом материале (модель Мурнагана) // Прикладная механика. – 2011. – 47, № 3. – С. 50–58.
3. *Хотенко О. О., Хотенко І. М.* Двовимірна динамічна задача теорії гіперпружності // Вісник КНУ ім. Т.Г. Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2017. – Спецвипуск. – С. 245–248.

**ANALYSIS OF HARMONICS OF THE QUADRATICALLY NONLINEAR
HYPERELASTIC PLANE LONGITUDINAL WAVE**

A numerical modeling of generation of the first four harmonics (first, second, fourth, eighth) is carried out for the analyzed before analytically problem on propagation of a plane longitudinal harmonic wave in materials, deformation of which is occurring quadratically nonlinear according to the classical Murnaghan model. The family of fibrous composite materials with internal structure of micro and nanolevel is chosen for modeling. The utilizing of composite materials with given internal structures introduces the additional real restrictions on the main parameters choice and allows to simulate different real situations: from the case when all the harmonics under consideration can be detected for the real distances and real time to the case, when the second harmonics can be detected for the real distances and real time.