**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2019»,
27–29 травня 2019 р., Львів**

УДК 517.9

ON CARATHÉODORY-LASALLE'S THEOREMS FOR SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Oleh Buhrii[1], Nataliya Buhrii[2], Oksana Kholyavka[3]

[1] Ivan Franko National University of Lviv, oleh.buhrii@lnu.edu.ua
[2] National University "Lviv Polytechnic", nataliia.v.buhrii@lpnu.ua
[3] Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine, oksana.t.kholyavka@gmail.com

Let $d \in N$ and $T > 0$ be fixed numbers, $Q = (0,T) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. We consider the following problem:

$$\varphi''(t) + K(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = S(t), \qquad t \in (0,T), \tag{1}$$

$$\varphi(0) = \varphi^0, \qquad \varphi'(0) = \varphi^1, \tag{2}$$

where $K : Q \to \mathbb{R}^d$ and $S : (0,T) \to \mathbb{R}^d$ are some functions (for the sake of convenience we have assumed that $K(t,0,0) = 0$ for every $t \in (0,T)$), $\varphi^0 = (\varphi_1^0, \ldots, \varphi_d^0) \in \mathbb{R}^d$, and $\varphi^1 = (\varphi_1^1, \ldots, \varphi_d^1) \in \mathbb{R}^d$.

Definition. A real-valued function $\varphi \in W^{2,1}(0,T;\mathbb{R}^d)$ is called a *global weak solution* of problem (1)-(2) if φ satisfies equation (1) almost everywhere and satisfies initial value condition (2).

Definition. We shall say that a function $K : Q \to \mathbb{R}^d$ satisfies the *Carathèodory condition* if for every $\varsigma \in \mathbb{R}^d$ the function $(0,T) \ni t \to K(t,\varsigma) \in \mathbb{R}^d$ is measurable and if for a.e. $t \in (0,T)$ the function $\mathbb{R}^d \ni \varsigma \to K(t,\varsigma) \in \mathbb{R}^d$ is continuous.

Let $p \in [1;+\infty)$ be a fixed number.

Definition. We shall say that a function $K : Q \to \mathbb{R}^d$ satisfies the L^p*-Carathèodory condition* if K satisfies the Carathèodory condition and if for every $R > 0$ there exists a function $h_R \in L^p(0,T)$ such that the estimate

$$| K(t,\varsigma) |_{\mathbb{R}^d} \le h_R(t)$$

holds for a.e. $t \in (0,T)$ and for every $\varsigma \in \overline{D_R} := \left\{ y \in \mathbb{R}^d : |y| \le R \right\}$.

We prove the next Theorem.

Theorem (second Carathèodory-LaSalle theorem). *Suppose that* $p \ge 2$, *function* K *satisfies the* L^p*-Carathèodory condition,* $S \in L^p(0,T;\mathbb{R}^d)$, *and* $\varphi^0, \varphi^1 \in \mathbb{R}^d$. *Then if there exists a nonnegative functions* $\gamma,\ \sigma,\ \omega \in L^1(0,T)$ *such that for every* $\xi,\ \eta \in \mathbb{R}^d$ *and for a.e.* $t \in (0,T)$ *the inequality*

$$(K(t,\xi,\eta),\ \eta)_{\mathbb{R}^d} \ge -\gamma(t)\,|\xi|^2_{\mathbb{R}^d} - \sigma(t)\,|\eta|^2_{\mathbb{R}^d} - \omega(t),$$

holds, then problem (1)-(2) has a global weak solution $\varphi \in W^{2,p}(0,T;\mathbb{R}^d)$.

Proof the above Theorem it was used results obtained by O. Buhrii and N. Buhrii in [1].

1. *Buhrii O., Buhrii N.* Integro-differential systems with variable exponents of nonlinearity // Open Mathematics. − 2017. − № 15. − P. 859–883.
2. *Пономарев К. К.* Составление дифференциальных уравнений. − Минск: Вышэйшая школа, 1873. − 560 с.

ТЕОРЕМИ КАРАТЕОДОРІ-ЛАССАЛЯ ДЛЯ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Встановлено умови існування глобальних узагальнених розв’язків задач Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь спеціального виду. Такі задачі виникають, зокрема, при дослідженні мішаних задач для нелінійних гіперболічних рівнянь з частинними похідними другого порядку, а також мають широке практичне застосування (див., наприклад, [2]). При отриманні даного результату використано результати досліджень, проведених О. Бугрієм та Н. Бугрій у праці [1].