Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2019», 27–29 травня 2019 р., Львів

УДК 539.3

ФУНКЦІЇ БУССІНЕСКА ТРИВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПІВПРОСТОРУ З ДЖЕРЕЛОМ ТЕПЛА

Роман Андрійчук

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, andriychukroman@gmail.com

Доповідь присвячена побудові функцій Буссінеска задач термопружності для півбезмежного простору із вільною, жорстко, гладко або гнучко закріпленою межею за нульової температури або теплоізоляції на ній під дією стаціонарного джерела тепла. В циліндричній системі координат з початком на межі півпростору і віссю Oz, перпендикулярною до неї, температурне поле записуємо у вигляді

$$t(r,z)=\frac{w}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{R_1(r,z)}+\frac{(-1)^k}{R_2(r,z)}\right),\quad R_{1,2}(r,z)=\sqrt{r^2+(z\mp h)^2}\,, \tag{1}$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності, w – потужність джерел тепла, h – віддаль джерела тепла до межі, $k=1$ відповідає нульовій температурі межі тіла, а $k=2$ – її теплоізоляції.

Механічні крайові умови подамо так:

– *для вільної межі* $\sigma_{zz}(r,0)=0,\quad \sigma_{rz}(r,0)=0$; (2)

– *для жорстко закріпленої меж* $u_r(r,0)=0,\quad u_z(r,0)=0$; (3)

– *для гладко закріпленої межі* $u_z(r,0)=0,\quad \sigma_{rz}(r,0)=0$; (4)

– *для гнучко закріпленої межі* $u_r(r,0)=0,\quad \sigma_{zz}(r,0)=0$. (5)

Компоненти вектора переміщень і тензора напружень шукаємо у вигляді

$$u(r,z)=\bar{u}(r,z)+\bar{\bar{u}}(r,z),\qquad \sigma(r,z)=\bar{\sigma}(r,z)+\bar{\bar{\sigma}}(r,z),$$

де перші доданки характеризують напружено-деформований стан безмежного тіла, а другі – переміщення і напруження у півпросторі, які забезпечують виконання умов (2)–(5).

Переміщення і напруження у безмежному тілі визначаються через термопружний потенціал переміщень

$$f(r,z)=A\left[R_1(r,z)+(-1)^k R_2(r,z)\right],\quad A=\frac{mw}{8\pi\lambda},\qquad m=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t\,, \tag{6}$$

де α_t і ν – коефіцієнти лінійного теплового розширення і Пуассона. Зокрема

$$\bar{u}_r = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad \bar{u}_z = \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \bar{\sigma}_{zz} = 2G\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - mt\right), \quad \bar{\sigma}_{rz} = 2G\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial z}. \tag{7}$$

Переміщення $\bar{\bar{u}}(r,z)$ і напруження $\bar{\bar{\sigma}}(r,z)$ визначимо за допомогою функції Буссінеска F, яку подамо у вигляді суми двох гармонічних функцій

$$F(r,z) = \varphi(r,z) + z\psi(r,z). \tag{8}$$

Переміщення і напруження визначаються формулами

$$\bar{\bar{u}}_r = \frac{\partial F}{\partial r}, \qquad \bar{\bar{\sigma}}_{zz} = 2G\left[\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - 2(2-\nu)\frac{\partial \psi}{\partial z}\right],$$

$$\bar{\bar{u}}_z = \frac{\partial F}{\partial z} - 4(1-\nu)\psi, \quad \bar{\bar{\sigma}}_{rz} = 2G\left[\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z} - 2(1-\nu)\frac{\partial \psi}{\partial r}\right]. \tag{9}$$

Якщо джерела тепла розподілені у паралельній до межі півпростору круговій області S, то напруження в декартовій системі координат $Ox_1x_2x_3$ з початком у центрі круга і осями Ox_1 і Ox_2, розташованими в області S, визначається за формулою

$$\sigma_{ij}^*(x_1,x_2,z) = \iint_S w(\xi_1,\xi_2)\sigma_{ij}(x_1,x_2,z;\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2. \tag{10}$$

де $r = \sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2}$. У зв'язку з перенесенням початку системи координат з межі півпростору в область S

$$R_1(r,z) = \sqrt{r^2 + z^2}, \qquad R_2(r,z) = \sqrt{r^2 + (z+2h)^2}.$$

Розглянуто випадки, коли розподілені в круговій області S радіуса a площини $z = 0$ джерела тепла $w(r)$ описуються формулами

$$1)\ w(r) = w_0, \quad 2)\ w(r) = \frac{w_0 a}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \quad 3)\ w(r) = \frac{w_0}{a}\sqrt{a^2 - r^2}. \tag{11}$$

BOUSSINESQ'S FUNCTIONS OF THE 3D THERMOELASTICITY PROBLEM FOR HALF-SPACE AT THE ACTION OF A HEAT SOURCE

At the action of a stationary heat source, Boussinesq's functions of the thermoelasticity problem for half-space with free, rigidly, smoothly or flexibly fastened boundary, on which zero temperature or thermal insulation is given, are constructed. Green`s functions, derived by using Boussinesq's functions, used to determine thermoelastic state of the half-space caused by heat generation in a parallel to the boundary domain.