Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2017»,
23–25 травня 2017 р., Львів

УДК 514.17+517.55

МНОЖИНИ МІРИ НУЛЬ, ЯКІ МІСТЯТЬ ДОВІЛЬНУ КІЛЬКІСТЬ МНОЖИН ПЕВНОГО КЛАСУ

Марія Стефанчук

Інститут математики НАН України, stefanmv43@gmail.com

Нехай $M = (M_i, i \in \mathbb{N})$ є сім'єю множин в *n*-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. Нас цікавлять такі сім'ї множин, які після застосуваня до них сім'ї T геометричних перетворень $T_i, (i \in \mathbb{N})$, по-перше, будуть належати множині досить малої міри і, по-друге, їх об'єднання матиме міру нуль.

Це питання досліджувалося у роботах Безіковича, Радо, Какейя, Перрона, Радемахера, Шонберга та Фішера. Зокрема, Безікович [1, 2], розглядав випадки, коли M є сім'єю всіх відрізків скінченної довжини та довільнх напрямків, а також сім'єю прямих довільних напрямків.

Теорема 1 [1]. *Для $n \geq 2$ існує множина $F \subset \mathbb{R}^n$, n-вимірна лебегова міра якої дорівнює нулю, яка містить одиничний лінійний відрізок довільного напрямку.*

Теорема 2 [2]. *Для $n > 2$ існує множина $F \subset \mathbb{R}^n$, n-вимірна лебегова міра якої дорівнює нулю, що містить пряму довільного напрямку.*

Крім цього, у роботі [3] Безікович і Радо досліджували дане питання для сім'ї кіл усіх скінченних радіусів. Коротко опишемо етапи побудови цієї множини. На першому етапі побудови плоске кругове кільце з центром в початку координат та шириною 1 розрізають на *n* кілець першого порядку, ширина кожного з яких n^{-1}. Ці кільця переміщають у напрямку $2\pi/n$ так, що відрізки їхніх радіусів збігаються у цьому напрямку. При цьому зовнішнє кільце залишається фіксованим, а всі інші кільця переміщаються на відстань ln^{-1}, де $l \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Якщо n велике, то об'єднання перетворених кілець дуже тонке в області $0 \leq \theta < 2\pi/n$. На другому етапі кожне кільце першого порядку розрізають на *n* кілець другого порядку, які потім так само переміщають у напрямку $4\pi/n$ на відстань ln^{-2}, де $l \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Об'єднання n^2 перетворених кілець дуже тонке в області $0 \leq \theta < 4\pi/n$. На етапі *k*, якщо *n* досить велике, об'єднання перетворених кілець порядка *k* дуже тонке в області $0 \leq \theta < 2k\pi/n$. Тому плоска міра утвореної множини, яка лежить у кільці $9 \leq |z| \leq 11$, може бути як завгодно малою для досить великого *n*. У результаті геометричних перетворень об'єднання цих сімей можна було помістити у замкнену множину плоскої міри нуль.

Теорема 3 [3]. Існує плоска замкнена множина міри нуль, яка містить кола довільних радіусів.

У роботі [4] ми досліджували цю проблему для сім'ї сфер довільних радіусів в *n*-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. За допомогою геометричних перетворень буде отримано об'єднання цих сфер, яке можна помістити у множину (лебегової) міри нуль.

Теорема 4 [4]. *В n-вимірному евклідовому просторі* $\mathbb{R}^n$ *існує множина міри нуль, яка містить сфери усіх радіусів.*

1. 1*Besicovitch A.S., Rado R.* A plane set of measure zero containing circumferences of every radius // J. London Math. Soc. – 1968. – V. 43 – P. 717–719.
2. 2*Besicovitch A.S.* Sur deux questions d'integrabilite des fonctions // J. Soc. Phys. – Math.(Perm'). – 1919 (1920). – V. 2 – P. 105–123.
3. 3*Besicovitch A.S.* On Kakeya's problem and a similar one // Math. Zeit. – 1928. – V. 27 – P. 312–320.
4. *Стефанчук М. В., Ткачук М. В.* Множина міри нуль, яка містить сфери довільних радіусів // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – Т. 12, № 4 – С. 285–289.

THE SETS OF MEASURE ZERO CONTAINING ANY QUANTITY OF SETS OF DEFINITE CLASS

This thesis is devoted to investigation the sets of measure zero, that contain any quantity of sets of definite class. We build null-measured set in $\mathbb{R}^n$ *that contains spheres with all radii.*