**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2017»,
23–25 травня 2017 р., Львів**

УДК 512.64

ПРО РОЗКЛАД МАТРИЦЬ З ПОВНОЇ ЛІНІЙНОЇ ГРУПИ В ДОБУТОК МАТРИЦЬ З ПЕВНИХ ЇЇ ПІДМНОЖИН

Андрій Романів

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України, romaniv_a@ukr.net

Нехай R – комутативна область Безу стабільного рангу 1,5 [1] з $1 \neq 0$, $M_n(R)$ – кільце $n \times n$ матриць над R, $GL_n(R)$ – повна лінійна група. За структурою R є областю елементарних дільників [2], тобто кожна неособлива матриця $D \in M_n(R)$ має властивість канонічної діагональної редукції:

$$D \sim \Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n),\ \varphi_i \mid \varphi_{i+1},\ i = 1, \cdots, n-1.$$

Матриця Φ називається канонічною діагональною формою або ж формою Сміта матриці D.

Нехай $T = DC$, де $T \sim \Gamma = \operatorname{diag}(\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$, $\gamma_i \mid \gamma_{i+1}$, $i = 1, \cdots, n-1$.

Розглянемо множину оборотних матриць

$$\mathbf{L}(\Gamma, \Phi) = \{H \in GL_n(R) \mid H\Gamma = \Phi H_1,\ \ddot{a}\mathring{a}\quad H_1 \in M_n(R)\},$$

яка називається породжуючою множиною [3].

Нехай $A, B \in M_n(R)$ матриці, найбільший спільний дільник мінорів $(n-1)$-го порядку яких дорівнює одиниці. Тоді

$$A \sim \mathrm{E} = \operatorname{diag}(1, \cdots 1, \varepsilon),\ B \sim \Delta = \operatorname{diag}(1, \cdots 1, \delta).$$

Символом (a, b) будемо позначати найбільший спільний дільник елементів a та b.

Зображення оборотної матриці у вигляді добутку матриць з певних множин використовується при дослідженні властивостей найбільшого спільного дільника та найменшого спільного кратного матриць. У 2011 р. H. Chen [4] показав, що довільна оборотна матриця розкладається у добуток трьох трикутних матриць над асоціативним кільцем стабільного рангу 1. В. Щедрик [5] показав, що повна лінійна група розкладається у добуток трьох її підгруп, дві з яких є групи верхніх та нижніх унітрикутних матриць над комутативними областями Безу стабільного рангу 1,5.

Теорема. *Нехай* R *– комутативна область Безу стабільного рангу* 1,5, $S = \left\| s_{ij} \right\|_1^n \in GL_n(R)$ *і*

$$\Omega = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, \omega_{n-1}, \omega_n),$$

де $\omega_{n-1} | \omega_n$, $\omega_i | (\varepsilon_i, \delta_i)$, $i = n-1, n$. *Для того, щоб існували такі оборотні матриці*

$$L_A = \left\| \begin{matrix} & & * & * & \\ \varepsilon l_{n1} & \cdots & \varepsilon l_{n.n-2} & \dfrac{\varepsilon}{(\varepsilon, \omega_{n-1})} l_{n.n-1} & l_{nn} \end{matrix} \right\|$$

та

$$L_B = \left\| \begin{matrix} & & * & * & \\ \delta p_{n1} & \cdots & \delta p_{n.n-2} & \dfrac{\delta}{(\delta, \omega_{n-1})} p_{n.n-1} & p_{nn} \end{matrix} \right\|,$$

де $L_A \in \mathbf{L}(\Omega, \mathrm{E})$, $L_B \in \mathbf{L}(\Omega, \Delta)$, *що* $SL_A = L_B$ *необхідно та достатньо, щоб*

$$\frac{(\varepsilon, \delta)}{\left((\varepsilon, \delta), \omega_{n-1}\right)} \Big| (s_{n1}, \ldots, s_{n.n-1}).$$

1. *Щедрик В. П.* Кільця стабільного рангу 1,5 // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, – № 6. – С. 849 – 860.
2. *Kaplansky I.* Elementary divisor and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **66.** – P. 464 – 491.
3. *Щедрик В. П.* Про факторизацію матричних многочленів // Доповіді академії наук Української РСР. – 1989. – 10 – С. 41 – 43.
4. *Chen H.* Rings related to stable range conditions. – World scientific, 2011., Vol 11 – 680 p.
5. *Щедрик В. П.* Кільця Безу стабільного рангу 1,5 і розклад повної лінійної групи в добуток деяких її підгруп // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, – № 1. – С. 113 – 120.

ON DECOMPOSITION OF MATRICES FROM FULL LINEAR GROUP IN THE PRODUCT MATRICES FROM CERTAIN ITS SUBSETS

The necessary and sufficient conditions to decomposition of matrices from full linear group in the product matrices from certain its subsets is established.