Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2017», 23–25 травня 2017 р., Львів

УДК 517.95

ПЕРІОДИЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ РУХУ ОДНОРІДНОЇ БАЛКИ

Марія Негрич

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
negrychmariya@gmail.com

У прямокутнику $D=\{(t,x)\mid t\in(0,T),\ x\in(0,L)\}$ розглядаємо задачу

$$u_{tt}(t,x)+a^2u_{xxxx}(t,x)+bu_{xx}(t,x)+cu(t,x)=0, \qquad (t,x)\in D, \tag{1}$$

$$\begin{gathered} u(t,0)=u(t,L), \qquad u_x(t,0)=u_x(t,L), \\ u_{xx}(t,0)=u_{xx}(t,L), \qquad u_{xxx}(t,0)=u_{xxx}(t,L), \qquad 0\le t\le T, \end{gathered} \tag{2}$$

$$u(0,x)-u(T,x)=\phi(x), \quad u_t(0,x)-u_t(T,x)=\psi(x), \quad 0\le x\le L, \tag{3}$$

де $a,b,c\in\mathbf{R}$, $b^2<4a^2c$, $\phi(x)$ і $\psi(x)$ – задані функції зі шкали просторів $H_q=H_q[0,T]$, де $q\in\mathbf{R}$ – простір усіх тригонометричних рядів

$$\phi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\phi_k e^{i\lambda_k x},$$

зі скінченною нормою $\|\phi\|_{H_q}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}(1+|k|)^{2q}\,|\phi_k|^2\right)^{1/2}$, $\lambda_k=2\pi k/L.$

Розв’язок задачі (1) – (3) шукаємо з простору $C^2([0,T];H_q)$, де $C^n([0,T];H_q)$, $n\in\mathbf{Z}_+$ – простір усіх рядів вигляду

$$u(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)e^{i\lambda_k x},$$

для яких

$$\|u\|^2_{C^n([0,T];H_q)}=\sum_{j=1}^{n}\max_{t\in[0,T]}\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^j u_k(t)}{dt^j}e^{i\lambda_k x}\right\|^2_{H_q}<\infty.$$

Коректна розв'язність задачі (1) – (3) залежить від діофантових властивостей послідовності

$$\left|1-\cos\beta_k T\right|,\ k\in\mathbf{Z},$$

де $\beta_k=\sqrt{a^2\lambda_k^4-b\lambda_k^2+c}$.

Якщо $\beta_k T\neq 2\pi m$ для всіх $(k,m)\in\mathbf{Z}^2$, то задача (1) – (3) має єдиний розв'язок, який зображується формулою

$$u(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\beta_k\left(\cos\beta_k t-\cos\beta_k(t-T)\right)\phi_k+\left(\sin\beta_k t+\sin\beta_k(t+T)\right)\psi_k}{2\beta_k\left(1-\cos\beta_k T\right)}e^{i\lambda_k x}, \qquad (4)$$

де ϕ_k , ψ_k – коефіцієнти Фур'є функцій ϕ і ψ відповідно.

За допомогою метричного підходу [3] доведено такі твердження.

Теорема 1. *Для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* **R**) *чисел* T *нерівність*

$$\left|1-\cos\beta_k T\right|\geq T^2k^{-\gamma}$$

виконується для всіх (*крім скінченної кількості*) *значень* $k\in\mathbf{Z}$ *при* $\gamma>2$.

Теорема 2. *Якщо* $\phi\in H_{q+\gamma+4}$ *і* $\psi\in H_{q+\gamma+2}$, *де* $\gamma>2$, *то для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* **R**) *чисел* T *існує єдиний розв'язок задачі* (1)–(3) *з простору* $C^2([0,T];H_q)$, *який неперервно залежить від функцій* ϕ *і* ψ .

Періодична крайова задача за просторовою координатою досліджувалась також у [1, 2].

1. *Azizbayov E., Mehraliyev Y.* A time-nonlocal boundary value problem for equation of homogeneous bar motion // Вісник Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Серія «Математика, механіка». – 2012. – 17. – С. 20–23.
2. *Azizbayov E., Mehraliyev Y.* A boundary value problem for the equation of motion of a homogeneous bar with periodic conditions // American Journal of Applied Mathematics and Statistics. – 2015. – 3(6). – P. 252–256.
3. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К. : Наук. думка, 2002. – 416 с.

A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH PERIODIC CONDITIONS FOR THE EQUATION OF MOTION OF A HOMOGENEOUS BAR

The solution of the boundary value problem with periodic conditions for the equation of bar motion is studied. Using by the metrical approach the existence and uniqueness of the classical solution for the given problem are established for almost all (except for sets of arbitrarily small measure) values of parameter T in periodical conditions.