Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2017»,
23–25 травня 2017 р., Львів

УДК 517.519: 517.96

ФОРМУВАННЯ ДИСИПАТИВНИХ СТРУКТУР У МОДЕЛІ ТИПУ ФІТЦ-ХЬЮ-НАГУМО ІЗ ПРОСТОРОВИМИ ДРОБОВИМИ ПОХІДНИМИ

Юлія Максимів

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України, yulyya2609@i.ua

Системи реакції-дифузії викликають значну цікавість при дослідженні нерівноважних систем. Експериментальні дослідження спіральних хвиль, просторових дисипативних структур із складною симетрією, а також виникнення хаотичної динаміки в хімічних та біологічних системах призвели до того, що системи реакції-дифузії стали предметом інтенсивних сучасних досліджень. Слід зазначити, що у таких системах дифузійні процеси за рахунок ефекту пам’яті проявляють аномальну природу.

У цій роботі досліджуємо модель типу Фітц-Хью-Нагумо із супердифузією [1]. Ця модель узагальнює одну з найбільш відомих базових моделей реакції-дифузії, в якій класичні просторові диференціальні оператори замінено їх дробовими аналогами:

$$\tau_1 \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta^{\alpha} u - \frac{1}{3} u^3 + u - v ,$$

$$\tau_2 \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta^{\alpha} v + Bu - v + A. \tag{1}$$

Систему (1) доповнюємо граничними умовами, які відповідають відсутності потоків на границі:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=L} = 0 .$$

Тут u, v – залежні змінні системи; τ_1, τ_2 – характерні часи системи; d_1, d_2 – коефіцієнти дифузії; A, B – зовнішні біфуркаційні параметри, які характеризують рівень нерівноважності системи; α — порядок дробової похідної $(1 < \alpha < 2)$.

У одновимірному випадку просторові дробові похідні записуються у вигляді [2]:

$$\frac{\partial^{\alpha} f(x,t)}{\partial x^{\alpha}} = -\frac{1}{2\cos(\pi\alpha/2)}\left[D_{+}^{\alpha} f(x,t) + D_{-}^{\alpha} f(x,t)\right],$$

при цьому для випадку $\left(1 < \alpha < 2\right)$ маємо:

$$D_{+}^{\alpha} f(x,t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d^2}{dx^2} \int_{-\infty}^{x} \frac{f(\xi,t)}{(x-\xi)^{\alpha-1}} d\xi,$$

$$D_{-}^{\alpha} f(x,t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d^2}{dx^2} \int_{x}^{\infty} \frac{f(\xi,t)}{(\xi-x)^{\alpha-1}} d\xi.$$

Для встановлення впливу аномальної дифузії на формування дисипативних структур проведено чисельне моделювання та показано, що при зменшені порядку дробової похідної відбувається зменшення періоду утворення структур (рис. 1).

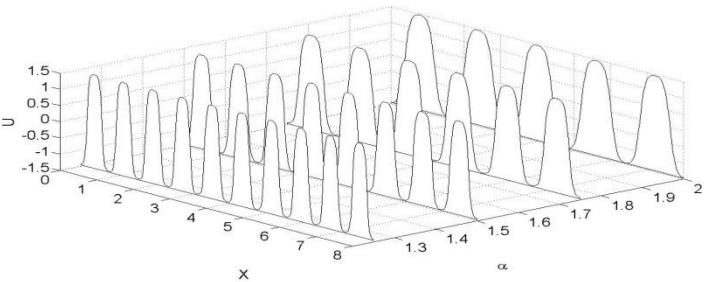

Рис. 1. Еволюція форми дисипативної структури для різних порядків похідної.

Досліджено умови нестійкості просторово-однорідних станів системи (1) та нелінійну динаміку розв’язків, які виникають внаслідок біфуркації таких станів. Проаналізовано спектр власних значень для різних порядків похідної за різних співвідношень характерних часів і довжин системи. За допомогою числового моделювання показано, що при зменшенні порядку дробової похідної, тобто коли рівень аномальності дифузії є суттєвим, відбувається зменшення періоду формування стаціонарних дисипативних структур.

1. *Кернер Б. С., Осипов В. В.* Автосолитоны. – Москва: Наука, 1991. – 199 с.
2. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

FORMATION OF DISSIPATIVE STRUCTURES IN THE FITZHUGH-NAGUMO MODEL WITH SPATIAL FRACTION DERIVATIVES

We analyze the evolution of dissipative structures in the FitzHugh-Nagumo model with superdiffusion based on the numerical simulation.