Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2017»,
23–25 травня 2017 р., Львів

УДК 517.912:512.816

ГАЛІЛЕЙ ІНВАРІАНТНІ СИСТЕМИ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

Наталія Ічанська, Людмила Блажко

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка,
natasha.ichanska@mail.ru, k26@pntu.poltava.ua

При дослідженні різних явищ природи часто приходять до математичних моделей у вигляді диференціальних рівнянь. Одним з методів інтегрування диференціальних рівнянь є метод Софуса Лі, в основі якого лежить принцип симетрії.

У роботі застосовано метод Софуса Лі до системи еволюційних рівнянь третього порядку вигляду:

$$U_0 + F(U)U_1 + KU_{11} + \Lambda U_{111} = 0, \tag{1}$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $u^a = u^a(x_0, x_1)$, $F = \begin{pmatrix} F^{11} & F^{12} \\ F^{21} & F^{22} \end{pmatrix}$, $F^{ab} = F^{ab}(u^1, u^2)$ – гладкі функції, $K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix}$, k_{ab}, λ_{ab} – сталі, $a, b = 1, 2$.

Система (1) при конкретних нелінійностях знаходить широке застосування в теорії густих частотних полів, в загальних розтягах і деформаціях скінченних середовищ, подібних до розтягів Хабла Всесвіту в астрофізиці, в явищах турбулентної дифузії, в процесах, пов'язаних із рідинами Ван–дер–Вальса.

Авторами зроблено поставку і розв'язано задачу: знайти такі функції F^{ab}, при яких система (1) є інваріантною відносно узагальненої алгебри Галілея:

$$AG_2(1,1) = \langle AG_1(1,1),\ \Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + \eta^a\partial_{u^a} \rangle,$$

де $Q_1 = (m_{ab}u^b + n_a)\partial_{u^a}$, $Q_2 = (\alpha_{ab}u^b + \beta_a)\partial_{u^a}$, m_{ab}, n_a, α_{ab}, β_a – довільні сталі, $\eta^a = \eta^a(x_0, x_1, \vec{u})$ – довільні гладкі функції.

У результаті проведених досліджень одержано п'ять суттєво різних систем, інваріантних відносно узагальненої алгебри Галілея:

1. $$u_0^1+u^1u_1^1+k_{11}u_{11}^1+\lambda_{12}u_{111}^2=0,$$
$$u_0^2+u^1u_1^2+k_{22}u_{11}^2=0;$$

2. $$u_0^1+u^1u_1^1+C_1u_1^2+k_{11}u_{11}^1=0,$$
$$u_0^2+2u^2u_1^1+(u^1+C_2\sqrt{u^2})u_1^2+k_{22}u_{11}^2+\lambda_{21}u_{111}^1=0;$$

3. $$u_0^1+u^1u_1^1+C_1e^{2u^2}u_1^2+k_{11}u_{11}^1+\lambda_{12}u_{111}^2=0,$$
$$u_0^2+u_1^1+(u^1+C_2e^{u^2})u_1^2+k_{22}u_{11}^2=0;$$

4. $$u_0^1-\frac{m}{u^2}u_1^1+\lambda_{12}u_{111}^2+((u^1-m\ln u^2)^2+C_1(u^1-m\ln u^2)+C_2)\frac{u_1^2}{(u^2)^2}=0,$$
$$u_0^2-u_1^1-\frac{m}{u^2}u_1^2+(2(u^1-m\ln u^2)+C_1)\frac{u_1^2}{u^2}=0;$$

5. $$u_0^1+(1+C)u^2u_1^1+(2u^1-(1+C)(u^2)^2)u_1^2k_{11}u_{11}^1+\lambda_{12}u_{111}^2=0,$$
$$u_0^2+Cu_1^1+(1-C)u^2u_1^2+k_{11}u_{11}^2=0,$$

де $k_{11},k_{22},\lambda_{12},\lambda_{21},m,C,C_1,C_2$ – довільні сталі.

Доведено, що у класі систем третього порядку (1) лише дані системи є інваріантними відносно узагальненої алгебри Галілея. У зв'язку з тим, що вказані системи інваріантні відносно узагальненої алгебри Галілея, вони можуть претендувати на описання реальних фізичних процесів. Зазначимо, що перша система застосовується при описі солітонових процесів, а друга, при $k_{11}=k_{22}=C_2=0$, є системою рівнянь Буссінеска, що описує хвильові процеси.

1. *Lie S*. Classification und Integration von gewohnlichen Differential-gleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten // Arch. Math. Naturv. – 1883. – V. 9. – P. 371-393.
2. *Lie S. Uber* Differentialinvarianten // Math. Ann. – 1884. – Vol. 24, № 1. – P. 52-89.
3. *Lie S*. Vorlesungen uber continuerliche gruppen. – Leipzig:Teubnne, 1893. – P. 805.

SYSTEMS OF THIRD-ORDER EVOLUTION EQUATIONS INVARIANT UNDER GALILEAN ALGEBRAS

This work is devoted to investigation of symmetry properties of nonlinear evolution equations and construction of their exact solutions. Completed classification of third order quasi-linear systems of evolutionary equations invariant with respect to the extended Galilei algebra is carried out.