**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2017»,
23–25 травня 2017 р., Львів**

УДК 539.3

# ЦИЛІНДРИЧНА ОБОЛОНКА СКІНЧЕННОЇ ДОВЖИНИ ЗА ЗМІННОЇ У ЧАСІ ДІЇ ЛОКАЛЬНИХ ДЖЕРЕЛ ТЕПЛА

**Надія Гануліч**

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, nadiaganulich@gmail.com

Розв'язано квазістатичну задачу термопружності для піддатливої зсувові [1] циліндричної оболонки скінченної довжини, яка зазнає дії осесиметричних джерел тепла, що описуються функцією густини

$$Q(x;\tau) = Q_0\theta(x;a)[C^*\theta(\tau) + \sum_{k=0}^{m} C_k \tau^k e^{-\beta_0^2\tau}], \quad \tau > 0,$$
$$\theta(x;a) = \theta(x+a) - \theta(x-a)\,, \tag{1}$$

де $x$ – віднесена до радіуса $R$ осьова координата, $\tau = t/(\alpha R^2)$ – безрозмірний параметр реального часу $t$, $\alpha = C_v\rho/\alpha_t$, $C_v$, $\rho$ та $\alpha_t$ – теплоємність, густина і коефіцієнт теплопровідності матеріалу, $a$ – ширина кільця нагрівання оболонки, $\beta_0$ – коефіцієнт згасання джерел, $\theta(x)$ – функція одиничного стрибка Хевісайда, а $Q_0, C^*, C_k$ – задані константи.

Розв'язок отримано методом інтегральних перетворень Лапласа рівняння теплопровідності [2] за умови відсутності температури при $\tau = 0$ з наступним поданням рядом Фур'є розв'язку задачі згину серединної поверхні оболонки з нульовими на її кінцях $x = 0$ та $x = l$ кутами повороту і перерізуючими силами.

Розглянуто чотири розподіли джерел (1), для яких отримано такі вирази температури, нормальних прогинів оболонки, кільцевих зусиль та згинних моментів

$$T(x;\tau) = \frac{2q_0}{\beta_t l}\left[\frac{1}{2}\psi_0^{(j)}(\tau) + \frac{l}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^{(j)}(\tau)\frac{\sin(\lambda_n a)}{n}\cos(\lambda_n x)\right], \tag{2}$$

$$W(x;\tau) = \frac{2Rq_0}{l}\left[\frac{1}{2}\psi_0^{(j)}(\tau) + \frac{4k^4 l}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^{(j)}(\tau)\frac{1+\varepsilon\lambda_n^2}{\mu_n^4}\frac{\sin(\lambda_n a)}{n}\cos(\lambda_n x)\right], \tag{3}$$

$$N(x,\tau) = -\frac{4}{\pi}Ehq_0\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^{(j)}(\tau)\frac{\sin(\lambda_n a)}{n\mu_n^4}\lambda_n^4\cos(\lambda_n x), \tag{4}$$

$$M(x;\tau) = \frac{4}{\pi}EhRq_0\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^{(j)}(\tau)\frac{\sin(\lambda_n a)}{n\mu_n^4}\lambda_n^2\cos(\lambda_n x)\,, \tag{5}$$

де $q_0 = \beta_t R^2 Q_0/\alpha_t, \lambda_n = n\pi/l$, $\mu_n^4 = \lambda_n^4 + 2g^2\lambda_n^2 + 4k^4$, $\varepsilon = g^2/(2k^4)$ – параметр взаємозсуву волокон оболонки, $2g^2 = E/(k'G')$, $4k^4 = 3(1-\nu^2)(R/h)^2$,

$h$ – товщина оболонки, $E$ – модуль Юнга, $\nu$ – коефіцієнт Пуассона, $k'$ і $G'$ – коефіцієнт і модуль зсуву, $\beta_t$ – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу оболонки. Функції $\psi_n^{(j)}(\tau),(n=0,1,2,3,...)$ визначаються рівностями:

$$\psi_n^{(1)}(\tau)=\nu_n^{-2}(e^{-\beta_0^2\tau}-e^{-\nu_n^2\tau}),\ \psi_n^{(2)}(\tau)=\nu_n^{-4}(e^{-\omega_n^2\tau}+(\nu_n^2\tau-1)e^{-\beta_0^2\tau}),$$

$$\psi_n^{(3)}(\tau)=\omega_n^{-2}-\nu_n^{-2}e^{-\beta_0^2\tau}+\beta_0^2(\nu_n^2\omega_n^2)^{-1}e^{-\omega_n^2\tau},$$

$$\psi_n^{(4)}(\tau)=\omega_n^{-2}+\nu_n^{-2}e^{-\beta_0^2\tau}-(\nu_n^2\omega_n^2)^{-1}(\nu_n^2+\omega_n^2)e^{-\omega_n^2\tau},$$

де $\nu_n^2=\omega_n^2-\beta_0^2$, $\omega_n^2=\lambda_n^2+\beta^2$, $\beta^2=\kappa R^2/(\alpha_t h)$, $\kappa$ – коефіцієнт тепловіддачі поверхні оболонки, а верхній індекс $j=1,2,3,4$ у виразах $\psi_n^{(j)}(\tau)$ означає порядковий номер джерел $Q_j(x;\tau)$, які за певних значень коефіцієнтів у виразі (1) набувають вигляду:

$$Q_1(x;\tau)=Q_0\theta(x;a)e^{-\beta_0^2\tau},\ \ Q_2(x;\tau)=Q_0\theta(x;a)\tau e^{-\beta_0^2\tau}, \tag{6}$$

$$Q_3(x;\tau)=Q_0\theta(x;a)\left(1-e^{-\beta_0^2\tau}\right),\ Q_4(x;\tau)=0,5Q_0\theta(x;a)\left(1+e^{-\beta_0^2\tau}\right). \tag{7}$$

Зауважимо, що формули (3)–(5) наведено для $\beta_0\neq\beta$, однак у випадку $\beta_0=\beta$ за правилом Лопіталя–Бернуллі з них легко отримати відповідні їм аналогічні рівності, яких тут не подаємо.

Аналіз показав, шо кільцеві зусилля та осьові моменти в оболонці сягають найвищих рівнів за різних для окремих розподілів (6) та (7) значень $\tau$, однак за усіх розподілів вони набувають максималних значень у початку відліку $x=0$ і незалежно від ширини кільця нагріву допоки $a\in(0;l/4)$.

При подальшому розширенні поясу нагрівання $a\in(l/4;l)$ точки максимумів зусиль і моментів одночасно з пониженням їх рівня неухильно рухаються до правого кінця оболонки. У граничному випадку при $a=l$ з (2)–(5) випливають формули, що описують вільне теплове розширення оболонки, за якого температура і прогини (розширення радіуса) набувають незалежних від осьової координати $x$ значень, а зусилля та моменти відсутні в усіх її перерізах.

Якщо ж ширину кільця нагріву спрямувати до нуля, утримуючи при цьому її добуток з густиною джерел постійним, то за першою важливою границею з тих же формул (2) – (5) отримуємо вирази, які визначають найвищі рівні зусиль та моментів в оболонці з максимумами їх значень у точці $x=0$:

$$T=2(\beta_t l)^{-1}q_0^*T^*(x;\tau),\ \ W=2Rl^{-1}q_0^*W^*(x;\tau),$$

$$N=-4Ehl^{-1}q_0^*N^*(x;\tau),\ \ M=4Ehl^{-1}Rq_0^*M^*(x;\tau),$$

де зірочкою позначені безрозмірні величини:

$$T^*(x;\tau)=\frac{1}{2}\psi_0^{(j)}(\tau)+\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^{(j)}(\tau)\cos(\lambda_n x),$$

$$W^*(x;\tau)=\frac{1}{2}\psi_0^{(j)}(\tau)+4k^4\sum_{n=1}^{\infty}(1+\varepsilon\lambda_n^2)\mu_n^{-4}\psi_n^{(\mathrm{j})}(\tau)\cos(\lambda_n x),$$

$$N^*(x;\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^4\mu_n^{-4}\psi_n^{(j)}(\tau)\cos(\lambda_n x),\ M^*(x;\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\mu_n^{-4}\psi_n^{(j)}(\tau)\cos(\lambda_n x).$$

При цьому відповідні максимальним рівням зусиль та моментів критичні значення $\tau$ наступають (крім розподілу $Q_3$) дещо раніше від тих значень, за яких досягають своїх максимумів відповідні температурні поля, що пояснюється більшою градієнтністю температур на початкових стадіях процесу нагріву оболонки. Критичні значення параметра $\tau$ для розглянутих режимів нагріву, а також відповідні їм розрахункові величини на лівому краю оболонки за різного ступеня податливості матеріалу зсувові, що визначається відношенням $E/G'$, ілюструються побудованою за $\nu=0,3$, $R=0,1$ м, $h=0,005$ м, $l=2$ таблицею:

| $Q^*(\tau)$ | $Q_1$ | $Q_2$ | $Q_3$ | $Q_4$ | $E/G'$ | $\beta_0/\beta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\tau$ | 0,065 | 0,545 | $\infty$ | 0,090 | – | – |
| $10T^*(0;\tau)$ | 2,334 | 0,947 | 6,397 | 2,801 | – | 0,86 |
| | 2,304 | 0,824 | 6,397 | 2,573 | – | 1 |
| | 0,806 | 0,178 | 0,972 | 0,860 | 0 | 0,86 |
| $10N^*(0;\tau)$ | 0.581 | 0,129 | 0,699 | 0,619 | 40 | 0,86 |
| | 0,516 | 0,113 | 0,620 | 0,549 | 60 | 0,86 |
| | 0,162 | 0,045 | 0,256 | 0,184 | 0 | 0,86 |
| $10^2M^*(0;\tau)$ | 0,108 | 0,032 | 0,180 | 0,124 | 40 | 0,86 |
| | 0,094 | 0,028 | 0,159 | 0,108 | 60 | 0,86 |

1. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью, – Киев: «Наукова думка», 1973, 248 с.
2. *Максимук О. В., Ганулiч Н. В.* Термопружність циліндричної оболонки із низькою зсувною жорсткістю у локальному температурному полі // Математичні методи та фізико-механічні поля, 2015, 58, № 3. – С. 26– 34.

## FINITESIMAL LENGTH CYLINDRICAL SHELL UNDER THE TIME-VARYING LOCAL HEAT SOURCES INFLUENCE

*Quasistatic problem of thermoelasticity for the finitesimal length cylindrical shell with ring distribution of thermal sources over four heating modes has been solved on the basis of the shear deformation model of the thin-walled elements of the structures. Thermoelastic state of the shell with the maximum values of design parameters was investigated for various ratios of the Young's modulus and shear modulus of the material.*