**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2017»,
23–25 травня 2017 р., Львів**

УДК 519.632.4

A POSTERIORI ERROR ESTIMATOR BASED ON FUNDAMENTAL SOLUTION FOR 1D *HP*-ADAPTIVE FEM APPROXIMATION

Roman Drebotiy

Ivan Franko National University of Lviv, roman.drebotiy@gmail.com

This paper is devoted to present a simple explicit error estimator and related *hp*-adaptive finite element method (FEM) scheme for one-dimensional convection-diffusion-reaction boundary value problem. Algorithm is based on a combination of explicit and implicit error estimators. Described scheme is considered suitable for singular perturbed problems which are characterized by relatively large values of Peclet and Strouhal criteria. Convergence of constructed algorithm is proved by numerical experiments.

Model problem

Let us consider the next boundary value problem:
find function $u = u(x)$ such that

$$\begin{cases} -(\mu u')' + \beta u' + \sigma u = f \quad \text{in} \quad \Omega = (0, L), \\ (\mu u')\big|_{x=0} = \alpha[u(0) - \bar{u}_0], \quad -(\mu u')\big|_{x=L} = \gamma[u(L) - \bar{u}_L], \end{cases} \tag{1}$$

where $\alpha, \gamma \geq 0, \quad \mu(x) \geq \mu_0 > 0, \quad \sigma(x) \geq 0$ almost everywhere in Ω,

$\mu, \beta, \sigma \in L^{\infty}(0, L), \quad f \in L^2(0, L)$.

We use standard approach to derive variational problem for (1) and discretize the latter by the pure Galerkin method. High-order polynomial approximation spaces are used on each finite element. They are constructed using Lobatto shape functions, providing better stability of solution of discretized problem in the meaning of smaller condition number of stiffness matrix.

Adaptation algorithm and error estimator

In the constructed scheme explicit error estimator is used for the selection of finite elements, which need to be refined, and implicit (i.e. the solution of auxiliary variational problem for error) to select the optimal element refinement pattern on each finite element. Here we present another type of explicit estimator which is computed in the same manner as implicit estimator but taking into account that we use one-dimensional space to find actual solution of variational problem for the error we can just derive explicit formulas for the estimator. Basically we use wellknown abstract approach [4] but define special basis function for it's 1D approximation space:

$$\varphi_K(t) =$$

$$= \begin{cases} \varphi_1(t) = c_{11}\varphi_{11}(t) + c_{12}\varphi_{12}(t),\ \varphi_1(t_{k-1}) = 0,\ \varphi_1(t_{k-1/2}) = 1,\ x \in [t_{k-1}, t_{k-1/2}] \\ \varphi_2(t) = c_{21}\varphi_{21}(t) + c_{22}\varphi_{22}(t),\ \varphi_2(t_{k-1/2}) = 1,\ \varphi_2(t_k) = 0,\ x \in [t_{k-1/2}, t_k] \end{cases},$$

where $K = [t_{k-1}, t_k]$ is finite element and $\{\varphi_{1i}(t)\}, \{\varphi_{2i}(t)\}$ are the sets of fundamental solutions for equation

$$-(\tilde{\mu}_i e_i')' + \tilde{\beta}_i e_i' + \tilde{\sigma}_i e_i = 0$$

with constant coefficients (selected as mean values of corresponding functions) on corresponding intervals $[t_{k-1}, t_{k-1/2}]$ and $[t_{k-1/2}, t_k]$.

1. *Solin P., Segeth K., Dolezel I.* Higher-Order Finite Element Methods // London: Chapman & Hall, 2003.
2. *Dorfler W., Heuveline V.* Convergence of an adaptive *hp* finite element strategy in one space dimension // ScienceDirect, Applied Numerical Mathematics. – 2007. – № 57. – P. 1108-1124.
3. *Drebotiy R., Shynkarenko H.* HP-adaptive finite element method for 1d diffusion-convection-reaction boundary value problems // Manufacturing processes. Actual problems, Polytechnica Opolska, Opole. – 2014. – P. 11-26.
4. *Абрамов Є., Ліпіна О., Шинкаренко Г., Ямелинець А.* Кусково-лінійні апроксимації *h*-адаптивного методу скінчених елементів для одновимірних крайових задач // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. мат. та інформ.– 2006. – Вип. 11. – С.3-18.

АПОСТЕРІОРНИЙ ОЦІНЮВАЧ ПОХИБКИ НА ОСНОВІ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ДЛЯ ОДНОВИМІРНОГО *HP*-АДАПТИВНОГО АЛГОРИТМУ МСЕ

Розглянуто простий явний оцінювач на основі фундаментального розв'язку та відповідну hp-адаптивну схему методу скінченних елементів (МСЕ) для одновимірних крайових задач конвекції-дифузії-реакції. Базовий алгоритм ґрунтується на комбінуванні явних та неявних апостеріорних оцінювачів похибок (АОП). Розглянута схема придатна для застосування до сингулярно збурених задач, які, в свою чергу, характеризуються великими значеннями критеріїв подібності Пекле і Струхаля. Збіжність побудованого алгоритму перевірено шляхом проведення обчислювальних експериментів.