**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2017»,
23–25 травня 2017 р., Львів**

УДК 519.6:539.3

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ РІВНЯНЬ З ПОХІДНИМИ ДРОБОВОГО ПОРЯДКУ ЗА ДОПОМОГОЮ СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДУ

Олег Браташ

Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, olebra31@gmail.com

Спектральні методи використовують для розв’язування широкого класу задач математики та механіки. Суть цих методів полягає в тому, що функції, які входять у модель, подають у вигляді ортогональних рядів за вибраним базисом. Знаходження розв’язку в такому випадку зводиться до обчислення коефіцієнтів ортогонального ряду шуканого розв’язку.

Нестаціонарний рух газу в горизонтальних трубопроводах описується лінеаризованою системою диференціальних рівнянь із частинними похідними, яка має такий вигляд [1]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\omega(x,t)}{\partial t} + \dfrac{\partial p(x,t)}{\partial x} + a\omega(x,t) - bp(x,t) = 0 \\ \dfrac{\partial\omega(x,t)}{\partial x} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial p(x,t)}{\partial t} = 0 \end{cases}, \tag{1}$$

де p,ω – відповідно, тиск і масова швидкість руху газу; t – час; x – біжуча координата, $x \in [0, L]$; L – довжина трубопроводу, $a = \upsilon_1 + \upsilon_2$, $b = -\frac{1}{4}\left(\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2\right)$, а υ_1 і υ_2 – межі зміни швидкості.

Для того, щоб краще врахувати історію процесу, в даній системі рівнянь похідну по часу $\frac{\partial}{\partial t}$ замінимо дробовою похідною в термінах Рімана-Ліувілля [2]

$$D_t^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\varphi(t) := \frac{1}{\Gamma(\mu+1-\alpha)}\frac{\partial^{\mu+1}}{\partial\zeta^{\mu+1}}\int_0^t \frac{\phi(\zeta)}{(t-\zeta)^{\alpha-\mu}}d\zeta, \tag{2}$$

де μ – ціла частина дійсного числа.

Подамо функції $p(x,t)$ та $\omega(x,t)$, які входять у розв’язок задачі, у ряд Фур’є за многочленами Лагерра $L_m(t)$

$$p(x,t)=\sum_{m=0}^{\infty} p_m(x)L_m(t), \quad \omega(x,t)=\sum_{m=0}^{\infty} \omega_m(x)L_m(t)\,, \tag{3}$$

де коефіцієнти $p_m(x)$, $\omega_m(x)$ будемо визначати інтегральними співвідношеннями

$$p_m(x)=\int_0^{\infty} e^{-t} p(x,t)L_m(t), \quad \omega_m(x)=\int_0^{\infty} e^{-t}\omega(x,t)L_m(t)\,. \tag{4}$$

Підставивши у вихідну систему рівнянь (1) подання функцій рядами за многочленами Лагерра, отримаємо наступну систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x)L_n(t)+\sum\limits_{n=0}^{\infty} p'_n(x)L_n(t)+ \\ +a\sum\limits_{n=0}^{\infty} \omega_n(x)L_n(t)-b\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n(x)L_n(t)=0, \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \omega'_n(x)L_n(t)+\dfrac{1}{c^2}\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n(x)L_n(t)=0. \end{cases} \tag{5}$$

Невідомі p_{0j} та ω_{0j} обчислюються за формулами

$$p_{0j}=\frac{\Delta_{p0j}}{\Delta_{0j}}, \omega_{0j}=\frac{\Delta_{\omega 0j}}{\Delta_{0j}}, \tag{6}$$

де $\Delta_{0j}=\beta_{p0j}\beta_{\omega 0j}-\gamma_{\omega 0j}\gamma_{p0j}$, $\Delta_{p0j}=\alpha_{p0j}\beta_{\omega 0j}-\gamma_{\omega 0j}\alpha_{\omega 0j}$, .
$\Delta_{\omega 0j}=\alpha_{p0j}\gamma_{p0j}-\beta_{p0j}\alpha_{\omega 0j}$.

Тоді

$$p_0(x)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} p_{0j}e^{-\frac{j\pi ix}{l}} \tag{7}$$

1. *Александров А. В., Яковлев Е. И.* Проектирование и эксплуатация систем дальнего транспорта газа. – М.: Недра, 1974. – 432 с.
2. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.

THE AQUATION SYSTEMS SOLVING WITH FRACTIONAL RERIVATIVES BY THE SPECTRAL METHOD

The spectral method for investigation of mathematical models of physical processes using fractional time derivatives are constructed in this paper.