

## ФОРМА СМІТА НАЙБІЛЬШОГО СПІЛЬНОГО ДІЛЬНИКА ОДНОГО КЛАСУ МАТРИЦЬ

Андрій Романів

Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, romaniv\_a@ukr.net

Нехай  $R$  – комутативна область Безу стабільного рангу 1,5 [1] з  $1 \neq 0$ .  
 $M_3(R)$  – кільце  $3 \times 3$  матриць над  $R$ . Нехай  $A, B$  –  $3 \times 3$  неособливі  
матриці над  $R$ . Кільце  $R$  є областю елементарних дільників [2]. Тобто для  
матриць  $A$  та  $B$  існують такі оборотні матриці  $P_A, P_B$  та  $Q_A, Q_B$ , що

$$P_A A Q_A = E, \text{ де } E = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), \varepsilon_i \mid \varepsilon_{i+1}, i = 1, 2,$$
$$P_B B Q_B = \Delta, \text{ де } \Delta = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \delta_3), \delta_i \mid \delta_{i+1}, i = 1, 2.$$

Матриці  $E$  та  $\Delta$  називаються канонічними діагональними формами або ж  
формами Сміта, а матриці  $P_A, P_B$  та  $Q_A, Q_B$  – лівими та правими  
перетворювальними матрицями матриць  $A$  та  $B$ , відповідно.

Якщо  $A = BC$ , то кажуть, що матриця  $B$  є лівим дільником матриці  $A$ .  
Якщо  $A = DA_1$  та  $B = DB_1$ , то матрицю  $D$  називають спільним лівим діль-  
ником матриць  $A$  та  $B$ . Окрім того, якщо матриця  $D$  ділиться зліва на  
кожний інший спільний лівий дільник матриць  $A$  та  $B$ , то її називають  
найбільшим спільним лівим дільником матриць  $A$  та  $B$ .

У 80-х роках минулого століття М. Newman сформулював задачу, яка  
полягала у встановленні взаємозв'язків між формами Сміта двох матриць та  
формами Сміта їх найбільшого спільного дільника над комутативною областю  
головних ідеалів. R. Thompson [3], досліджуючи цю задачу, вказав деякі  
умови подільності інваріантних множників двох матриць та інваріантних  
множників їх найбільшого спільного дільника.

**Теорема 1.** Нехай  $P_B P_A^{-1} = \left\| s_{ij} \right\|_1^3 = S$ . Тоді елементи

$$((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1](s_{21}, s_{31})) = p,$$

**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2016»,  
25–27 травня 2016 р., Львів**

$$\left( (\varepsilon_3, \delta_3), [\varepsilon_1, \delta_1] \frac{(\Delta \varepsilon_2, s_{31} \delta_2)}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1](s_{21}, s_{31}))}, \frac{\varepsilon_2 \delta_2}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1](s_{21}, s_{31}))} (s_{31}, s_{32}) \right) = q,$$

де  $\Delta = \begin{vmatrix} s_{21} & s_{22} \\ s_{31} & s_{32} \end{vmatrix}$ ,  $\varepsilon$  інваріантами стосовно вибору перетворювальних матриць  $P_B$  та  $P_A$ .

**Теорема 2.** Нехай  $R$  – комутативна область Безу стабільного рангу 1,5 і  $A, B$  – неособливі  $3 \times 3$  матриці над  $R$ , причому

$$P_A A Q_A = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = E, \quad \varepsilon_i \mid \varepsilon_{i+1}, \quad i = 1, 2,$$

$$P_B B Q_B = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \delta_3) = \Delta, \quad \delta_i \mid \delta_{i+1}, \quad i = 1, 2.$$

Тоді форма Смита найбільшого спільного лівого дільника матриць  $A$  та  $B$  має вигляд  $\Phi = \text{diag}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ , де

$$\varphi_1 = (\varepsilon_1, \delta_1), \quad \varphi_2 = ((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1](s_{21}, s_{31})),$$

$$\varphi_3 = \left( (\varepsilon_3, \delta_3), \frac{[\varepsilon_1, \delta_1](\Delta \varepsilon_2, s_{31} \delta_2)}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1](s_{21}, s_{31}))}, \frac{\varepsilon_2 \delta_2}{((\varepsilon_2, \delta_2), [\varepsilon_1, \delta_1](s_{21}, s_{31}))} (s_{31}, s_{32}) \right),$$

$$\text{де } \Delta = \begin{vmatrix} s_{21} & s_{22} \\ s_{31} & s_{32} \end{vmatrix}.$$

1. Щедрик В. П. Кільця стабільного рангу 1,5 // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 6. – С. 849–860.
2. Kaplansky I. Elementary divisor and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **66**. – P. 464–491.
3. Thompson R. C. Left multiples and right divisors of integral matrices // Linear and Multilinear Algebra. – 1986. – **19**. – P. 28–295.

**THE SMITH NORMAL FORM OF THE GREATEST COMMON  
DIVISOR OF ONE CLASS OF MATRICES**

*The Smith normal form of the left greatest common divisor of one class of nonsingular matrices of the third order over a commutative Bézout domain of stable range 1,5 is established.*