Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2016»,
25–27 травня 2016 р., Львів

УДК 517.946

ЗАДАЧА З ІНТЕГРАЛЬНОЮ УМОВОЮ ЗА ЧАСОМ ДЛЯ ГІПЕРБОЛО-ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ

Антон Кузь

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, kuz.anton87@gmail.com

Рівняння мішаного (зокрема гіперболо-еліптичного) типу, виникають при моделюванні багатьох процесів трансзвукової газової динаміки, магнітної гідродинаміки, а також в теорії електричних кіл, безмоментній теорії оболонок з кривизною змінного знаку тощо [1]. Задачі з нелокальними умовами для таких типів рівнянь є, взагалі, умовно коректними, а їхня розв'язність часто пов'язана з проблемою малих знаменників. У цій роботі для гіперболо-еліптичного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами досліджено коректність задачі з нелокальною умовою за часовою змінною, що містить інтегральний доданок, у класі функцій, майже періодичних за просторовими змінними.

Нехай $x=\left(x_1,\dots,x_p\right)\in\mathbb{R}^p$, $\Delta=\sum_{j=1}^{p}\partial^2\big/\partial x_j^2$, $k=\left(k_1,\dots,k_p\right)\in\mathbb{Z}^p$, $|k|=|k_1|+\ldots+|k_p|$, $\mu_k=\left(\mu_{k_1},\dots,\mu_{k_p}\right)\in\mathbb{R}^p$, $\|\mu_k\|^2=\mu_{k_1}^2+\cdots+\mu_{k_p}^2$, $(\mu_k,x)=$ $=\mu_{k_1}x_1+\cdots+\mu_{k_p}x_p$; $D^p=\left\{(t,x):t\in(-T_1,T_2),x\in\mathbb{R}^p\right\}$, $T_1,T_2>0$, $D_+^p=$ $=D^p\cap\{t>0\}$, $D_-^p=D^p\cap\{t<0\}$, $V=\left\{\mu_n\in\mathbb{R}:\mu_{-n}=-\mu_n, d_1|n|^{\theta_1}\le|\mu_n|\le\right.$ $\left.\le d_2|n|^{\theta_2}, n\in\mathbb{Z}\right\}$, $0\le d_1<d_2$, $0\le\theta_1<\theta_2$; $\mathcal{M}=\left\{\mu_k\in V^p,k\in\mathbb{Z}^p\right\}$; $W_{\mathcal{M}}^{q,s}$, $q\in\mathbb{R}$, $s\ge0$ – простір майже періодичних функцій зі заданим спектром $\mathcal{M}$, отриманий шляхом поповнення простору поліномів вигляду $v(x)=\sum_k v_k\exp(i\mu_k,x)$, $\mu_k\in\mathcal{M}$, за нормою $\left\|v,W_{\mathcal{M}}^{q,s}\right\|^2=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}|v_k|^2\times$ $\times\left(1+\|\mu_k\|\right)^{2\alpha}\exp\left(2s\|\mu_k\|\right)$; $C^n\left([c,d],W_{\mathcal{M}}^{q,s}\right)$, $c,d\in\mathbb{R}$, $c<d$, – простір функцій $u(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}u_k(t)\exp(i\mu_k,x)$ таких, що при фіксованому $t\in[0,T]$

похідні $\partial_t^j u(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k^{(j)}(t) \exp(i\mu_k, x), \quad j \in \{0,1,\ldots,n\}$, належать простору $W_{\mathcal{M}}^{q,s}$, $\left\| u; C^n\left([c,d], W_{\mathcal{M}}^{q,s}\right)\right\| = \sum_{j=0}^{n} \max_{c \le t \le d} \left\| \partial_t^j u; W_{\mathcal{M}}^{q,s} \right\|$.

В області D^p розглядаємо задачу про знаходження функції $u := u(t,x)$, яка є майже періодичною за x зі спектром $\mathcal{M}$ і справджує наступні умови:

$$u \in C^2\left([-T_1, T_2], W_{\mathcal{M}}^{q,s}\right), \tag{1}$$

$$\begin{cases} u_{tt} + a^2 \Delta u = 0, & (t,x) \in D_+^p, \\ u_{tt} - b^2 \Delta u = 0, & (t,x) \in D_-^p, \end{cases}. \tag{2}$$

$$\alpha u(-T_1, x) + \beta \int_{-T_1}^{T_2} u(t,x)dt = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^p, \tag{3}$$

де $a,b > 0$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 \ne 0$, функція $\varphi(x)$ є майже періодичною за x зі спектром $\mathcal{M}$, причому $\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \varphi_k \exp(i\mu_k, x)$.

Встановлено критерій єдиності та достатні умови існування розв’язку задачі (1)-(3). Для розв’язання проблеми малих знаменників використано метричний підхід [2].

1. *Бицадзе А. В.* К проблеме уравнений смешанного типа // Тр. МИАН СССР. – 1953. – **41**. – С. 3–59.
2. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.

A PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITION WITH RESPECT TO THE TIME VARIABLE FOR HYPERBOLIC-ELLIPTIC EQUATION

The problem with integral condition with respect to the time variable for hyperbolic-elliptic equation in a class of functions, almost periodic for spatial variables is investigated. The criterion of uniqueness and the sufficient conditions of existence of the solution to the problem are established. To solve the problem of small denominators that appear in the construction of solution, the metric approach is used.