Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2016», 25–27 травня 2016 р., Львів

УДК 517.9

ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНОВИМІРНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ

Роман Ключник, Ірина Кміть

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, roman.klyuchnyk@gmail.com

У роботі розглядаємо лінійну гіперболічну систему першого порядку:

$$\partial_t u_j + a_j(x,t)\partial_x u_j + \sum_{k=1}^{n} b_{jk}(x,t)u_k = f_j(x,t), \quad j \le n, \quad x \in (0,1), t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

із крайовими умовами

$$\begin{aligned} u_j(0,t) &= (Ru)_j(t), \quad j \le m, \\ u_j(1,t) &= (Ru)_j(t), \quad m < j \le n. \end{aligned} . \tag{2}$$

Тут $m < n$ додатне ціле число, а $R = (R_1, \ldots, R_n)$ – лінійний обмежений оператор з BC_n в $BC_n(\mathbb{R})$. Позначимо через $BC_n(BC_n^1)$ – простір неперервних (диференційованих) та обмежених функцій на $(0,1)\times\mathbb{R}^n$.

Припускаємо наступні умови на коефіцієнти системи (1):

$$a_j, b_{jk} \in BC_1^1, \quad j \le n, k \le n, \cdot \tag{3}$$

$$\inf_{j,x,t} a_j > 0, \quad j \le m, \quad \sup_{j,x,t} a_j < 0, \quad m < j \le n. \cdot \tag{4}$$

Також припускаємо, що звуження оператора R на BC_n^1 є лінійним обмеженим оператором з BC_n^1 в BC_n^1 (умова (5)) і що

$$\forall (1 \le j \ne k \le n) \quad \exists \tilde{b}_{jk} \in BC_1^1 : b_{jk} = \tilde{b}_{jk}(a_k - a_j). \tag{6}$$

Через $\omega_j(\xi, x, t)$ позначимо характеристику $j-$того рівняння системи (1), яка проходить через точку (x,t). Введемо позначення

$$c_j(\xi,x,t) = \exp\int_x^{\xi} \frac{b_{jj}\left(\eta, \tau_j(\eta,x,t)\right)}{a_j\left(\eta, \tau_j(\eta,x,t)\right)} d\eta, \quad d_j(\xi,x,t) = \frac{c_j(\xi,x,t)}{a_j\left(\eta, \omega_j(\eta,x,t)\right)}.$$

Означення. Функція $u \in BC_n$ є обмеженим та неперервним розв'язком задачі (1)-(2), якщо вона задовольняє наступну систему інтегральних рівнянь:

$$u_j(x,t) = c_j(0,x,t)(Ru)_j\left(\omega_j(0,x,t)\right) - \\ -\int_0^x d_j(\xi,x,t)\sum_{k\neq j} b_{jk}\left(\xi,\omega_j(\xi,x,t)\right)u_k\left(\xi,\omega_j(\xi,x,t)\right)d\xi + \\ +\int_0^x d_j(\xi,x,t) f_j\left(\xi,\omega_j(\xi,x,t)\right)d\xi, \qquad 1 \le j \le m,$$

$$u_j(x,t) = c_j(1,x,t)(Ru)_j\left(\omega_j(1,x,t)\right) - \\ -\int_1^x d_j(\xi,x,t)\sum_{k\neq j} b_{jk}\left(\xi,\omega_j(\xi,x,t)\right)u_k\left(\xi,\omega_j(\xi,x,t)\right)d\xi + \\ +\int_1^x d_j(\xi,x,t) f_j\left(\xi,\omega_j(\xi,x,t)\right)d\xi, \qquad 1 \le j \le m.$$

Визначимо оператор $C : BC_n \to BC_n$ за таким правилом

$$(Cv)_j(x,t) = \begin{cases} c_j(0,x,t)(Rv)_j\left(\omega_j(0,x,t)\right), & j \le m, \\ c_j(1,x,t)(Rv)_j\left(\omega_j(1,x,t)\right), & m < j \le n. \end{cases}$$

Доведено теорему існування та єдиності обмеженого та неперервного розв'язку задачі (1)-(2).

Теорема. *Нехай виконуються умови (3)-(6). Також припустимо, що існує* $l \in \mathbb{N}$ *таке що* $\|C\|_{\mathcal{L}(BC_n)} < 1,$ *а також для всіх* $\varepsilon > 0$ *існує компактний інтервал* $I \subset \mathbb{R}$ *такий, що* $\left|b_{jk}(x,t)\right| < \varepsilon$, *де* $1 \le j \ne k \le n$, $x \in [0,1]$, $t \in \mathbb{R} \setminus I$. *Тоді задача (1)-(2) має єдиний обмежений та неперервний розв'язок* $u \in BC_n$.

1. *Kmit I., Recke L.* Periodic Solutions to Dissipative Hyperbolic Systems. I: Fredholm Solvability of Linear Problems // http://arxiv.org/abs/1108.2882.
2. *Kmit I.* Classical solvability of nonlinear initial-boundary problems for first-order hyperbolic system // J. Dyn S. and Differential Equations. – 2008. – № 3. – C. 191– 195.

BOUNDED SOLUTIONS TO BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ONE-DIMENSIONAL HYPERBOLIC SYSTEM

We establish conditions for existence and uniqueness of bounded continuous solutions for linear first-order hyperbolic system in a single space variable with boundary conditions.