Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2016», 25–27 травня 2016 р., Львів

УДК 517.95

МЕТРИЧНИЙ АНАЛІЗ МАЛИХ ЗНАМЕННИКІВ ІНТЕГРАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З НАВАНТАЖЕННЯМ ПОРЯДКУ

Дмитро Хомяк

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, khomiak.dmytro@gmail.com

В області $Q_T^p = (0,T)\times\Omega^p$ розглянемо задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D_x\right)u(t,x) \equiv \frac{\partial^n u}{\partial t^n} + \sum_{s_0=0}^{n-1}\sum_{|s|=n-s_0} a_{(s_0,s)} D_x^s \frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}} = F(t,x) + N[u], \qquad (1)$$

$$U_j[u] \equiv \int_0^T e^{\mu_j t} u(t,x)dt = \varphi_j(x),\ j=1,\dots,n,\ x\in\Omega^p, \qquad (2)$$

де Ω^p – p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $x=(x_1,\dots,x_p)\in\Omega^p$, $T>0$, $k=(k_1,\dots k_p)\in\mathbb{Z}^p$, $|k|=|k_1|+\dots+|k_p|$, $s=(s_1,\dots s_p)\in\mathbb{Z}_+^p$, $|s|=s_1+\dots+s_p$, $D_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\dots,\frac{\partial}{\partial x_p}\right)$, $D_x^s = \frac{\partial^{|s|}}{\partial_{x_1}^{s_1}\dots\partial_{x_p}^{s_p}}$, $a_{(s_0,s)}\in\mathbb{R}$, L – строго гіперболічний вираз, $\mu_j\in\mathbb{C}$, $j=1,\dots,n$, $\mu_j\neq\mu_q$, $j\neq q$; $N[u(t,x)] = \sum_{q=0}^{\gamma}\sum_{j=1}^{m} B_{j,q}(D_x)\left.\frac{\partial^q u(t,x)}{\partial t^q}\right|_{t=\tau_{j,q}}$,

де $B_{j,q}(D_x) = \sum_{|s|\le M} b_{j,q}^s D_x^s$, $b_{j,q}^s\in\mathbb{R}$, $j=1,\dots,m$, $q=0,1,\dots,\gamma$, $M<n$, $0\le\gamma\le n-1$, $0\le\tau_{1,0}<\dots<\tau_{1,\gamma}<\dots<\tau_{m,0}<\dots<\tau_{m,\gamma}\le T$.

Вираз $N[u(t,x)]$ будемо називати навантаженням порядку γ, оскільки він містить похідні за виділеною змінною t до порядку γ. Рівняння з таким навантаженням будемо називати “рівнянням з навантаженням порядку γ”. Якщо $\gamma>n$, то такі рівняння називаються “істотно навантаженими” [1, 2]. При дослідженні задач з навантаженням порядку γ виникає проблема малих знаменників [3].

При дослідженні розв'язності задачі (1), (2) виникає потреба оцінити знизу для $k \in \mathbb{Z}^p / \{0\}$ модулі таких виразів:

$$\Delta(k) = \det \left\| U_j [\exp(i\lambda_q(k)t)] \right\|_{j,q=1}^{n}, \ \Gamma(k) = 1 - N_k \left[\int_0^T G_k(t,\tau) d\tau \right], \qquad (3)$$

де $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{Z}^p$ – функція Гріна задачі $L(d/dt, k)u_k(t) = 0$, $U_j[u_k] = 0$, $j = 1,\dots,n$, (нагадаємо, що функція Гріна існує, якщо $\Delta(k) \neq 0$). Вирази (3) є знаменниками коефіцієнтів ряду Фур'є, яким зображується розв'язок задачі (1), (2). Ці знаменники можуть ставати як завгодно малими для нескінченної кількості $k \in \mathbb{Z}^p$ і зумовити розбіжність вказаного ряду. За допомогою метричного підходу [1] встановлено такі результати.

Теорема 1. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $T > 0$ *нерівність* $|\Delta(k)| \geq |k|^{-\omega_1}$ *виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$*, якщо* $\omega_1 > (p+1)(n+1)!2^n - p$.

Теорема 2. *Нехай* $|\Delta(k)| \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^p$. Тоді *для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^{m(\gamma+1)}$*) векторів* $\vec{\tau} = \left(\tau_{1,0},\dots,\tau_{1,\gamma},\dots\tau_{m,0},\dots\tau_{m,\gamma}\right) \in [0,T]^{m(\gamma+1)}$ *нерівність* $|\Gamma(k)| \geq |k|^{-\omega_2}$ *виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$*, якщо* $\omega_2 > (\gamma+1)nmp$.

1. *Дженалиев М. Т.* К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. – Алматы : Компьютерный центр ИТПМ, 1995. – 270 с.
2. *Дженалиев М. Т, Рамазанов М. И, Туймебаева А. Е.* Об одной граничной задаче для «существенно» нагруженного параболического уравнения // Хабаршысы вестник Карагандинского университета. – Серия математика. – 2010. – № 2 (58). – С. 22–27.
3. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К. : Наук. думка, 2002. – 416 с.

METRIC ANALYSIS OF SMALL DENOMINATORS IN THE INTEGRAL PROBLEM FOR γ - ORDER LOADED HYPERBOLIC EQUATION

We proved the metric theorems about estimates from below of small denominators arising in the integral problem for γ *- order loaded hyperbolic equation.*